Сравнение вычислительной сложности алгоритмов адаптивной обработки сигналов в центрально-симметричных антенных системах

Е. И. Глушанков[1], А. А. Хренов[2]
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича
[1] glushankov57@gmail.com, [2]knerov00@yandex.ru

***Аннотация*. В данной статье мы рассмотрим алгоритмы адаптивной пространственной обработки сигналов, реализованные в антенных решетках, и оценим их вычислительную сложность.**

Ключевые слова: адаптивные алгоритмы обработки пространственных сигналов, антенные решетки, вычислительная сложность, матрицы специальной формы

I. Введение

Алгоритмы адаптивной пространственной обработки сигналов (ПОС), реализуемые в антенных решетках (АР) являются одним из распространенных методов повышения помехоустойчивости радиотехнических систем. Среди таких алгоритмов широко распространены алгоритмы, основанные на непосредственном обращении корреляционных матриц (КМ), сводящиеся к поиску оптимального винеровского решения [1–2]. При этом высокая вычислительная сложность подобных алгоритмов препятствует их широкому применению. В то же время в центрально-симметричных эквидистантных АР [3] КМ могут быть отнесены к матрицам специального вида, что позволит снизить их сложность. Покажем это для различных типов АР.

II. Описание алгоритмов

A. Линейная антенная решетка

Рассмотрим линейную АР, где Алгоритмы адаптации для КМ специального вида будем сравнивать с оптимальным алгоритмом Винера–Хопфа, в котором весовой вектор АР находится по следующей формуле [1]:

$$W = R_{XX}^{-1} \cdot R_{XZ} \tag{1}$$

где R_{XX}^{-1} – обратная корреляционная матрица входных сигналов АР, R_{XZ} – вектор корреляции входного сигнала с эталонным.

Вычислительная сложность данного алгоритма (1) складывается из количества арифметических операций и будет пропорциональна $\approx L^3$, где L – размерность КМ, определяемая числом элементов АР. В линейной АР КМ будет теплицевой [3].

Для вычисления решения (1) с теплицевой КМ воспользуемся рекуррентным алгоритмом Воеводина [4]. Модифицированный для пространственной обработки сигналов в линейных АР алгоритм обращения выборочных КМ, аппроксимированных теплицевыми матрицами, можно записать следующим образом.

Для нахождения весового вектора поставим задачу решения уравнения: $R_{XX}W = R_{XZ}$ и представим его в следующем виде:

$$R_{XX}\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \cdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xz0} \\ r_{xz1} \\ \cdots \\ r_{xz_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

где матрица R_{XX} имеет теплицеву структуру:

$$R_{XX_k} = \begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} & \cdots & r_{-k} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} & \cdots & r_{-k+1} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdots & r_{-k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_k & r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_0 \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать задачу последовательного вычисления вектора весовых коэффициентов W. $W^{(k)} = \begin{bmatrix} w_0^{(k)} & \cdots & w_k^{(k)} \end{bmatrix}^T$ – решения системы $R_{XX_k}W^{(k)} = R_{XZ}^{(k)}$, где $R_{XZ}^{(k)} = \begin{bmatrix} r_{xz_0}, ..., r_{xz_k} \end{bmatrix}^T$ – вектор корреляции.

Количество итераций (шагов) вычисления k зависит от порядка матрицы $L - k = (0 \div L - 1)$. На нулевом шаге определяются начальные значения, затем на всех последующих шагах будут определяться значения в соответствии с следующими формулами:

k = 0: $$\tilde{x}_0^{(0)} = 1 / r_0 p_0, \quad w_0^{(0)} = r_{xz_0} / r_0, \tag{3}$$

k = 1,2,…L – 1:

$$\tilde{F}_k = r_k \tilde{x}_0^{(k-1)} + r_{k-1}\tilde{x}_1^{(k-1)} + \cdots + r_1 \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}$$

$$s_k = -p_{k-1}\tilde{F}_k, \qquad p_k = p_{k-1} / (1 - s_k^2),$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_0^{(k)}, & \tilde{x}_1^{(k)}, & \cdots, & \tilde{x}_k^{(k)} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{x}_0^{(k-1)}, & \tilde{x}_1^{(k-1)}, & \cdots, & \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)} \end{bmatrix}^T +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0, & \tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}, & \tilde{x}_{k-2}^{(k-1)} & \cdots, & \tilde{x}_0^{(k-1)} \end{bmatrix}^T s_k$$

$$e_k = r_{xz_k} - r_k w_0^{(k-1)} - r_{k-1} w_1^{(k-1)} - \cdots - r_1 w_{k-1}^{(k-1)};$$

$$\omega_k = e_k \cdot p_k;$$

$$\left[w_0^{(k)},\quad w_1^{(k)},\quad \cdots,\quad w_k^{(k)}\right]^T =$$
$$=\left[w_0^{(k-1)},\quad w_1^{(k-1)},\quad \cdots,\quad w_{k-1}^{(k-1)},\quad 0\right]^T +$$
$$+\left[\tilde{x}_k^{(k)},\quad \tilde{x}_{k-1}^{(k)},\quad \cdots,\quad \tilde{x}_0^{(k)}\right]^T \omega_k$$

где p_0 – нормирующий множитель, произвольное ненулевое число.

В алгоритме (2) – (3) выполняется $2L^2$ операций умножения и $2L^2$ операций сложения-вычитания, отсюда вытекает вычислительная сложность равная $\approx L^2$.

B. Кольцевая антенная решетка

Для вычисления вектора весовых коэффициентов кольцевой АР, где КМ является циркулянтной [3] на основе прямого метода адаптации с обращением выборочных циркулянтных КМ воспользуемся рекуррентным алгоритмом на основе БПФ [5] и также сравним его с винеровским решением. Модифицированный для пространственной обработки сигналов в линейных АР алгоритм обращения выборочных КМ, аппроксимированных циркулянтными матрицами имеет следующий вид.

Пусть дана выборочная циркулянтная матрица R_{XX}:

$$R_{XX} = R_{XX_4} = \begin{bmatrix} r_0 & r_3 & r_2 & r_1 \\ r_3 & r_0 & r_3 & r_2 \\ r_2 & r_3 & r_0 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_0 \end{bmatrix}$$

Также для дальнейших вычислений нам понадобится матрица преобразования Фурье F:

$$F = (1/\sqrt{N})\cdot\begin{bmatrix} f_0^0 & f_0^1 & f_0^2 & \cdots & f_0^{N-1} \\ f_1^0 & f_1^1 & f_1^2 & \cdots & f_1^{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{N-1}^0 & f_{N-1}^1 & f_{N-1}^2 & \cdots & f_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix},$$

где числа $f_m = \exp(-i\cdot 2\cdot\pi\cdot m/N)$, $m = 0,...,N-1$. Данная матрица является унитарной, то есть её сопряженная совпадает с обратной матрицей: $F^* = F^{-1}$.

Алгоритм быстрого решения циркулянтной системы:

$$R_{XX}\cdot W = R_{XZ} \qquad (4)$$

основанный на методе Фурье, начинается с замены этой системы на две системы:

$$F^*\cdot R_{XX}\cdot F\cdot y = F^*\cdot R_{XZ}, \qquad (5)$$

$$F^*\cdot W = y. \qquad (6)$$

Шаг 1. Вычислить $F^*\cdot R_{XZ}$ (обратное преобразование Фурье с вектором корреляции R_{XZ})

Шаг 2. Вычислить $F^*\cdot R_{XX}\cdot F$ (прямое преобразование Фурье с первой строкой матрицы R_{XX}).

Шаг 3. Найти неизвестный вектор y из системы (5); матрица коэффициентов этой системы является диагональной матрицей:

$$F^*\cdot R_{XX}\cdot F = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Шаг 4. Найти неизвестный вектор W из системы (6) по формуле $W = F\cdot z$ (прямое преобразование Фурье с вектором $z = y/\sqrt{N}$).

Оценим (по порядку) количество арифметических операций в предложенном алгоритме. Прямое и обратное преобразования Фурье можно осуществить за $L\log_2 L$ арифметических операций. Поэтому на выполнение шагов 1, 2 и 4 потребуется $L\log_2 L$ арифметических операций. Выполнение шага 3 требует всего n арифметических операций. Таким образом, решение циркулянтной системы (3) можно осуществить за $L\log_2 L$ арифметических операций.

C. Прямоугольная антенная решетка

Для рассмотрения алгоритма прямоугольных АР с блочно-теплицевыми КМ [3] будем исследовать 4-элементную прямоугольную АР с $L = 4$, КМ для такой АР в виде:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & R_{-3} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & R_{-2} \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_{-1} \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Для решения системы с блочно-теплицевой матрицей будем использовать следующий алгоритм [4]. Для этого рассмотрим решение уравнения вида:

$$R_{xx}W^{(k)} = R_{xz}^{(k)}$$

Здесь – блочно-теплицева матрица, вида (7), правая часть представляет вектор $R_{xz} = \left[r_{xz_0}\quad r_{xz_1}\quad \cdots\quad r_{xz_{2N}}\right]^T = \left[R_{xz_0}\quad R_{xz_1}\quad \cdots\quad R_{xz_N}\right]^T$, где $R_{xz_0} = \left[r_{xz_0}\quad r_{xz_1}\right]^T$. Искомый вектор W состоит из блоков $p\times p$, как и .

Приведем блочный вариант метода усечённых систем:

$$\textbf{k = 0:}\quad W_0^{(0)} = R_0^{-1}\cdot R_{xz_0}, \qquad (8)$$

$$\textbf{k = 1,2,…L – 1:}\quad e_k = R_{xz_k} - R_k\cdot W_0^{(k-1)} - \ldots - R_1\cdot W_{k-1}^{(k-1)},$$

$$\omega_k = Q_k\cdot e_k,$$

$$\left[W_0^{(k)} \quad W_1^{(k)} \quad \cdots \quad W_k^{(k)}\right]^T =$$

$$=\left[W_0^{(k-1)} \quad W_1^{(k-1)} \quad \cdots \quad W_{k-1}^{(k-1)} \quad 0\right]^T +$$

$$+\left[Y_0^{(k)} \quad Y_1^{(k)} \quad \cdots \quad Y_k^{(k)}\right]^T \cdot \omega_k$$

Для поиска коэффициентов Q_k и параметров воспользуемся модифицированным алгоритмом [2]. В качестве выберем $Q_0 = R_0^{-1}$ и произведем следующие вычисления:

$$\mathbf{k = 0:} \quad Y_0^{(0)} = R_0^{-1} \cdot Q_0^{-1}, \tag{9}$$

k = 1,2,…L – 1:

$$G_k = R_{-1} \cdot Y_0^{(k-1)} + R_{-2} \cdot Y_1^{(k-1)} + \ldots + R_{-k} \cdot Y_{k-1}^{(k-1)},$$

$$p_k = -Q_{k-1} \cdot \alpha \cdot G_k, \quad Q_k = (I - p_k^2)^{-1} \cdot Q_{k-1},$$

$$\left[Y_0^{(k)} \quad Y_1^{(k)} \quad \cdots \quad Y_k^{(k)}\right]^T =$$

$$=\left[\beta Y_{k-1}^{(k-1)} \quad \cdots \quad \beta Y_0^{(k-1)} \quad 0\right]^T \cdot p_k +$$

$$+\left[0 \quad Y_0^{(k-1)} \quad Y_1^{(k-1)} \quad \cdots \quad Y_{k-1}^{(k-1)}\right]^T,$$

где и – квадратные блоки порядка p, причем такие, что: $\alpha^2 = \beta^2 = I$.

$$\alpha = \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Реализация данного алгоритма потребует выполнения p^3L^2 операций умножения и p^3L^2 операций сложения-вычитания, тем самым рассмотренный метод (8) – (9) имеет сложность $\approx L^2$.

III. Анализ результатов

ТАБЛИЦА I Сравнение методов

Название алгоритма	Количество операций (+/-)	Количество операции (×/÷)	Вычислитель-ная сложность
Алгоритм Винера–Хопфа	0	L^3	$\approx L^3$
Алгоритм Воеводина с greenhouse matrix	$2L^2$	$2L^2$	$\approx L^2$
Алгоритм БПФ с циркулянтной матрицей	0	$L\log_2 L$	$\approx L\log_2 L$
Алгоритм с блочно-теплицевой матрицей	p^3L^2	p^3L^2	$\approx L^2$

Из рассмотренных алгоритмов наименьшую вычислительную сложность имеет алгоритм БПФ для циркулянтных матриц, что позволяет получать искомое решение быстрее. Также стоит отметить, что удвоение размера входных данных увеличит время его выполнения чуть более, чем вдвое, по сравнению с другими алгоритмами.

Список литературы

[1] Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986 г. 448 с.

[2] Афанасьев Н.А., Глушанков Е.И., Кирик Д.И., Рылов Е.А. Сравнение винеровского и калмановского решения в задачах адаптации антенных решеток // Радиотехнические и телекоммуникационные системы, 2021, № 3, с. 33–39.

[3] Glushankov E.I., Kirik D.I., Kirsanov D.M., Rylov E.A. Adaptation of antenna arrays with using correlation matrices of a special types. 2021 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications, SYNCHROINFO 2021 – Conference Proceedings, 2021, 9488331

[4] Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987 г. 320 с.

[5] Мухамеджонова Ш.М., Назимов А.Б. Быстрые алгоритмы обработки больших массивов данных // Вестник ВГУ, Сер.: Технические науки, 2020, № 2 (8), С. 40–43.