Оптимизация состава взаимных измерений

Ю. Н. Рыбочкин*, Ф. Ю. Рыбочкин, А. А. Глебов
Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского
*ryun-73@mail.ru

Аннотация. **В данной статье представлены предложения по оптимизации состава взаимных измерений.**

Ключевые слова: надежность, анализ, эффективность, возможность

Методы определения расстояний между объектами обычно основываются на измерении величины запаздывания ответного или прямого сигналов относительно известного момента излучения. Однако достигаемая при этом точность определения относительных расстояний представляется недостаточной для решения ряда навигационных задач. Увеличение точности может быть получено за счет нахождения оптимального состава взаимных измерений между объектами. Под взаимными измерениями будем понимать некоторые линейные комбинации относительных расстояний между объектами.

Итак, необходимо найти оптимальный состав взаимных измерений (ζ_{opt}), удовлетворяющий критерию

$$detM\left(\zeta_{opt}\right) = \sup_{\zeta \epsilon \chi} \det M\left(\zeta\right), \tag{1}$$

где $M(\zeta)$ – информационная матрица;

χ – множество возможных составов взаимных измерений.

Рассмотрим состав измерений, задаваемый соотношением

$$\xi = PR + \delta\xi, \tag{2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T -$ вектор измерений; $R = (R_1, R_2, \dots, R_N)^T -$ вектор, составленный из всевозможных расстояний между κ объектами; $m = \frac{1}{2}\kappa(k-1) -$ количество расстояний; $P -$ матрица состава измерений, элементы которой могут принимать значения 1, 0, -1; $\delta\xi -$ случайный вектор ошибок измерений, причем

$$M(\delta\xi) = 0, M(\delta\xi\delta\xi^T) = \sigma^2 E_N.$$

Для *i*-го измерения из формулы (2) имеем:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij} R_{ij} + \delta\xi_i. \tag{3}$$

Задача оптимизации состава измерений состоит в нахождении матрицы P_{opt}, удовлетворяющей условию

$$\det\left(P_{opt}^T P_{opt}\right) = \sup_{P_{ij} \epsilon \{1,0,-1\}} \det(P^T P).$$

Таким образом, необходимо выбрать компоненты вектора *R*, которые следует включить в *i*-е измерение (ξ_i). Каждое измерение ξ_i характеризуется строкой P_i, элементы которой могут принимать значения из множества $\{1, 0, -1\}$. Величина $P_{ij} = 1$, если $R_j \in \xi_i$; $P_{ij} = -1$, если $-R_j \in \xi_i$; $P_{ij} = 0$, если $R_j \notin \xi_i$.

Задачи в аналогичной постановке возникают при взвешивании на двухчашечных весах [I]. Можно показать, что в рассматриваемом случае оптимальный состав измерений задается матрицей Адамара A_m, если только она существует.

Поэтому

$$\det(A_m^T A_m) = m^m \tag{4}$$

Качество оптимального состава можно оценить иначе:

$$Sp(A_m^T A_m)^{-1} = 1 \tag{5}$$

Предположим теперь, что измерения компонентов вектора производятся непосредственно и $P_m = E_m$. Тогда

$$\det(E_m^T E_m) = 1 \tag{6}$$

$$Sp(E_m^T E_m)^{-1} = m \tag{7}$$

Сопоставляя выражения (4), (5), (6) и (7), можно сделать вывод о том, что при заданном объеме выборки и одинаковой погрешности измерений оценки, реализуемые оптимальным составом измерений, намного эффективней оценок, реализуемых при непосредственных измерениях. Причем эффективность оптимального состава, задаваемого матрицей Адамара, пропорциональна размерности m вектора оцениваемых параметров. Однако чем больше m, тем труднее физически реализовать оптимальный состав данной размерности. Простейший состав взаимных измерений при $m = 2$ реализуется комбинацией разностно- и суммарно-дальномерного методов при определении местоположения объектов. Поверхностями положения при этом будут поверхности гиперболоида и эллипсоида. Если их фокусы совпадают, то данные поверхности ортогональны, что является оптимальным в смысле дисперсии оценки местоположения.

В тех случаях, когда матрица Адамара не существует (например, при $m = 3$) или ограничено количество расстояний, входящих в каждое измерение, $(r < m)$, целесообразно вносить ограничения в матрицу $P_m^T P_m$. [1]

$$P_m^T P_m = \begin{bmatrix} r & \lambda & .. & \lambda \\ \lambda & r & .. & \lambda \\ . & . & .. & . \\ \lambda & \lambda & .. & r \end{bmatrix} = (r-\lambda)E_m + \lambda I_m \quad (8)$$

где

$r = m - \upsilon$ — диагональные элементы;

υ — число нулей в каждом столбце P_m;

λ — внедиагональные элементы;

I_m — матрица, составленная из единиц.

При данных ограничениях

$$\det(P_m^T P_m) = (r-\lambda)^{m-1}[r+\lambda(m-1)], \quad (9)$$

$$Sp(P_m^T P_m)^{-1} = \frac{m[r+\lambda(m-2)]}{(r-\lambda)[r+\lambda(m-1)]}. \quad (10)$$

Рассмотрим вариант трех объектов $(m = 3)$. Пусть $\upsilon = 0$ и $\lambda = -1$, тогда

$$P_3^T P_3 = 4E_3 - I_3,$$
$$\det(P_3^T P_3) = 16,\ Sp(P_3^T P_3)^{-3} = \frac{3}{2}. \quad (11)$$

Состав измерений, задаваемый матрицей P_3, имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= R_1 + R_2 - R_3, \\ \xi_2 &= -R_1 + R_2 + R_3, \\ \xi_3 &= R_1 - R_2 + R_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Взаимные измерения (12) технически можно реализовать с помощью переотражателей сигналов (радиотехнических или оптических). Например, для реализации измерения ξ_1 необходимо 1-го объекта излучить сигнал в сторону 2-го и 3-го объектов, на 2-м объекте сигнал переотразить в сторону 3-го, где измерить разность моментов времени приема двух принятых сигналов. Аналогично реализуются измерения ξ_2 и ξ_3. Затем, используя результаты трех взаимных измерений, следует совместно определить расстояния $R_1,\ R_2,\ R_3$. Однако полученные оценки будут коррелированы. Для того, чтобы корреляционная матрица оценок стала диагональной, необходимо добавить четвертое измерение суммы расстояний

$$\xi_4 = R_1,\ R_2,\ R_3. \quad (13)$$

В этом случае $P^T P = 4E_3$ и

$$\det(P^T P) = 64, \qquad Sp(P^T P)^{-1} = \frac{3}{4}. \quad (14)$$

Сравнение выражений (11) и (14) свидетельствует о большей эффективности последнего состава взаимных измерений.

Заключение

Предлагаемый метод оптимизации состава взаимных измерений целесообразно использовать в системах контроля места группы объектов [2].

Список литературы

[1] Ермаков С.U. и др. Математическая теория планирования эксперимента. М.: Наука, 1983. 392 с.

[2] Козорез Д.Д. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных манёвренных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2009. 554 с.