# Особенности обобщенных рекуррентных алгоритмов оценивания

К. Р. Чернышев
*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук*
myau@ipu.ru

***Аннотация.*** **Статья посвящена разделу рекуррентного параметрического оценивания в задачах идентификации стохастических систем, связанному с применением неубывающих (как скалярных, так и матричных) шагов. Рассмотрены соответствующие особенности проекционных рекуррентных алгоритмов общего вида и установлены свойства сходимости. Представлен ряд результатов моделирования, подтверждающих теоретические соображения и выводы.**

***Ключевые слова: линейные системы; оценивание параметров; рекуррентные алгоритмы; сильная состоятельность***

## I. Введение

Известны и широко используются в различных теоретических и прикладных задачах алгоритмы оценивания, идентификации, оптимизации с не стремящимся к нулю коэффициентом усиления. В первую очередь такие алгоритмы связаны с именем С. Качмажа и его методикой [1]. В духе метода Качмажа в книге [2] (стр. 161–167) предлагается подход к построению рекурсивных алгоритмов параметрической идентификации линейных систем. Согласно этому подходу текущая оценка вектора параметров идентифицируемой системы представляет собой линейную комбинацию оценки вектора параметров, полученной на предыдущем шаге алгоритмов, и текущего вектора (обобщенных) входных воздействий. С теоретической точки зрения алгоритм, полученный в книге [2], классифицируется как алгоритм с неубывающим до нуля коэффициентом усиления, являясь обобщением алгоритма Качмажа. Однако результаты, представленные в книге [2], явно требуют соответствующих пояснений и комментариев.

Настоящая статья посвящена исследованию вышеупомянутых аспектов. Его цель – уточнить аналитическое выражение алгоритма, предложенного в книге [2], продемонстрировать его сильную непротиворечивость и уточнить условия его применения. Кроме того, в работе представлены численные результаты, подтверждающие теоретические выводы.

## II. Основные принципы и особенности

В книге [2] рассматривалась линейная стохастическая система, заданная формулой

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta^*, \tag{1}$$

где $y(t)$ – скалярный выходной сигнал системы, $\theta^*$ – вектор неизвестных параметров системы, подлежащих идентификации с использованием текущих наблюдений выходного сигнала и обобщенного многомерного входного сигнала $\varphi(t)$, $T$ – символ транспонирования.

Алгоритм рекуррентной идентификации системы (1) определен в [2] как

$$\theta(t) = \alpha(t)\theta(t-1) + \beta(t)\varphi(t), \tag{2}$$

где $\theta(t)$ обозначает текущую оценку вектора $\theta^*$, $\alpha(t), \beta(t)$ обозначают неизвестные скалярные параметры, подлежащие определению с учетом минимизации скалярного квадрата

$$\left(\theta^* - \theta(t)\right)^T\left(\theta^* - \theta(t)\right). \tag{3}$$

Результирующий алгоритм идентификации имеет вид [2]

$$\theta(t) = \theta(t-1) + P(t)\varphi(t)\left(y(t) - \theta^T(t-1)\varphi(t)\right), \tag{4α}$$

с матричным усилением $P(t)$, не стремящимся к нулю,

$$P(t) = \frac{\theta^T(t-1)\theta(t-1)\cdot \mathrm{I} - \theta(t-1)\theta^T(t-1)}{\theta^T(t-1)\theta(t-1)\varphi^T(t)\varphi(t) - \left(\theta^T(t-1)\varphi(t)\right)^2}, \tag{4β}$$

где I обозначает единичную матрицу.

Важной особенностью, лежащей в основе построения алгоритма (4), является ортогональность вектора оценки текущего параметра $\theta(t)$ и соответствующего вектора ошибки идентификации $\left(\theta^* - \theta(t)\right)$ на каждом шаге выполнения алгоритма [2], т. е.

$$\left(\theta^* - \theta(t)\right)^T\theta(t) = 0. \tag{5}$$

В книге [2] настаивается на среднеквадратичной сходимости алгоритма (4) на основании того факта, что величина (3) резко уменьшается с ростом $t$, т. е.

$$\left(\theta^* - \theta(t)\right)^T \left(\theta^* - \theta(t)\right) < \left(\theta^* - \theta(t-1)\right)^T \left(\theta^* - \theta(t-1)\right). \quad (6)$$

Очевидно, что такие рассуждения нельзя принимать в качестве доказательства сходимости алгоритма (4), так как резкое уменьшение неотрицательной числовой последовательности не обязательно означает сходимость этой последовательности к нулю, например: $\forall \varepsilon > 0 \quad \varepsilon(t) = \varepsilon + \frac{1}{t} \Rightarrow \varepsilon(t) < \varepsilon(t-1), \quad t = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, неравенство (6) не обязательно предполагает обращение в нуль своей левой части.

$$\delta(t) = \theta^T(t-1)\theta(t-1)\varphi^T(t)\varphi(t) - \left(\theta^T(t-1)\varphi(t)\right)^2. \quad (7)$$

Следует также обратить внимание на то, что в книге [2] не ясно изложено о возможности обращения в нуль значения

В формуле (4) это связано либо с линейной зависимостью векторов $\theta(t-1)$ и $\varphi(t)$, либо с обращением в нуль всех компонент одного вектора. В книге [2] утверждается, что случай линейной зависимости векторов $\theta(t-1)$ и $\varphi(t)$ в итоге приводит к условию совпадения оценок на текущем и предыдущем шагах (как указано в формуле (4))

$$\theta(t) = \theta(t-1), \quad (8)$$

так что выполнение алгоритма (4) останавливается. Однако такой результат был получен в [2] путем внесения соответствующего изменения в исходную постановку задачи определения параметров в формуле (2). Между тем, в случае прямого применения формулы (4) с учетом линейной зависимости векторов $\theta(t-1)$ и $\varphi(t)$, вычисление будет просто с нулевым знаменателем (7):

$$\delta(t) = 0, \quad (9)$$

и прекращаются, что приводит к неприемлемому результату.

Все сказанное относится к выбору начального приближения алгоритма (4) в качестве нулевого вектора, $\theta(0) = 0$, т. е. алгоритм (4) остановится на первом шаге. Таким образом, алгоритм получения (4) должен был быть изначально реализован с учетом возможности стремления выражения (7) к нулю (и, наконец, приближения к случаю (9)), что в итоге должно было привести к следующему (исправленному) форма выражения (4):

$$\theta(t) = \theta(t-1) + C_1(t)\varphi(t)\left(y(t) - \theta^T(t-1)\varphi(t)\right), \quad (10\alpha)$$

с не стремящимся к нулю матричным коэффициентом

$$C_1(t) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \begin{cases} \dfrac{\theta^T(t-1)\theta(t-1) \cdot \mathrm{I} - \theta(t-1)\theta^T(t-1)}{\delta(t)}, & при\ \delta(t) > 0, \\ \left(\varphi^T(t)\varphi(t)\right)^{-1}, & при\ \delta(t) = 0, \end{cases} \quad (10\beta)$$

где, как указано выше, $\delta(t)$ определяется формулой (7).

## III. Свойства обобщенного алгоритма

Пока, как указывалось выше, ключевой предпосылкой для получения алгоритма (4) является выполнение условия (5) на любом шаге $t$ работы алгоритма при условии его выполнения на предыдущем шаге $t-1$. Следовательно, начальное приближение $\theta(0)$ для алгоритма (4) необходимо выбирать так, чтобы выполнялось условие:

$$\theta^T(0)\theta^* = \theta^T(0)\theta(0). \quad (11)$$

Очевидным тривиальным выбором $\theta(0)$, всегда удовлетворяющего условию (11), является нулевой вектор, после чего формула (4) становится неприменимой, что в первую очередь диктует необходимость замены выражения (4) выражением (10).

Условия сходимости алгоритма (10) определяются следующим предложением.

*Предложение.* Предположим, что идентифицируемая система (1) удовлетворяет следующему условию (условию идентифицируемости системы (1) ):

$$rank\mathbf{E}\left\{\varphi(t)\varphi^T(t)\right\} = \dim\left\{\varphi(t)\right\}, \quad (12)$$

где $\mathbf{E}\{\cdot\}$ обозначает математическое ожидание.

Тогда при *нулевом* начальном приближении ( $\theta(0) = 0$ ) рекуррентная последовательность оценок, определяемая выражением (10), сходится к вектору $\theta^*$ истинных параметров системы (1) с вероятностью 1.

*Доказательство.* Вычитание $\theta^*$ из обеих частей выражения (10) с учетом описания системы (1) приводит к следующему соотношению:

$$\left\|\theta(t) - \theta^*\right\| = \left\|\left(\mathrm{I} - C_1(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\right)\left(\theta(t-1) - \theta^*\right)\right\|. \quad (13)$$

Выражение (13) понимается в смысле евклидовой нормы.

Таким образом, для доказательства этого предложения достаточно показать, что равенство

$$\left\|\left(\mathrm{I} - C_1(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\right)\left(\theta(t-1) - \theta^*\right)\right\| = \kappa(t)\left\|\theta(t-1) - \theta^*\right\|, \quad (14)$$

выполняется, где $\kappa(t)$ обозначает последовательность случайных величин, которая почти наверное удовлетворяет условию

$$0 \le \kappa(t) \le 1, \tag{15}$$

и начиная с некоторого *конечного* момента времени $t_0$ нестрогое правое неравенство (15) становится строгим:

$$\kappa(t) < 1 \quad \forall t > t_0. \tag{16}$$

Из выражения (14) следует, что

$$\left\|\left(\mathrm{I} - C_1(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\right)\left(\theta(t-1)-\theta^*\right)\right\|^2 - \\ -\left\|\theta(t-1)-\theta^*\right\|^2 = -\frac{\left(\varphi^T(t)\theta(t-1)-\varphi^T(t)\theta^*\right)^T}{\sigma(t)}, \tag{17}$$

где

$$\sigma(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \varphi^T(t)\varphi(t)\left(1-\dfrac{\left(\varphi^T(t)\theta(t-1)\right)^2}{\theta^T(t-1)\theta(t-1)\varphi^T(t)\varphi(t)}\right), \\ \text{при} \quad \delta(t) > 0, \\ \\ \varphi^T(t)\varphi(t), \quad \text{при} \quad \delta(t) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, сходимость алгоритма (10) равносильна выполнению условия

$$\varphi^T(t)\theta(t-1) - \varphi^T(t)\theta^* \ne 0 \tag{18}$$

в правой части выражения (17).

Если условие (18) нарушается, то начиная с *конечного* $t_0$ для *всех* $t > t_0$ будет выполняться равенство:

$$\varphi^T(t)\theta(t_0) = \varphi^T(t)\theta^*. \tag{19}$$

Умножая равенство (19) $\varphi(t)$ на математическое ожидание, получаем $\left(\mathbf{E}\left\{\varphi(t)\varphi^T(t)\right\}\right)\theta(t_0) = \left(\mathbf{E}\left\{\varphi(t)\varphi^T(t)\right\}\right)\theta^*$ при $\theta(t_0) \ne \theta^*$, что противоречит условию (12). Таким образом, в силу условий Предложения следует, что условие (15) выполняется, а оценки, полученные алгоритмом (10), сходятся к вектору $\theta^*$ параметров истинности системы (1) с вероятностью 1.

## IV. Численное исследование алгоритма (10)

На рис. 1 показано поведение квадрата нормы ошибки идентификации (формула (3)), полученного по алгоритму (10) (светлая кривая), и полученный по модифицированному (2 шага) алгоритму Качмажа

$$\theta(t) = \theta(t-1) + A(t)\varphi(t)\left(y(t) - \theta^T(t-1)\varphi(t)\right). \tag{20α}$$

$$A(t) \overset{def}{=} \\ \overset{def}{=} \begin{cases} \dfrac{\varphi^T(t-1)\varphi(t-1)\cdot \mathrm{I} - \varphi(t-1)\varphi^T(t-1)}{\gamma(t)}, \; if \;\; \gamma(t) > 0, \\ \\ \left(\varphi^T(t)\varphi(t)\right)^{-1}, \; if \;\; \gamma(t) = 0, \end{cases} \tag{20β}$$

$$\gamma(t) = \varphi^T(t-1)\varphi(t-1)\varphi^T(t)\varphi(t) - \left(\varphi^T(t-1)\varphi(t)\right)^2. \tag{20χ}$$

(черная кривая) [3]. Эта характеристика была получена путем усреднения компонентов более чем 30 независимых выборок. В качестве начального приближения использовался нулевой вектор. Как видно из рис. 1, характеристика, полученная алгоритмом (10), эквивалентна характеристике алгоритма (20), но алгоритм (10) показывает лучшие асимптотические свойства по сравнению с алгоритмом (20).

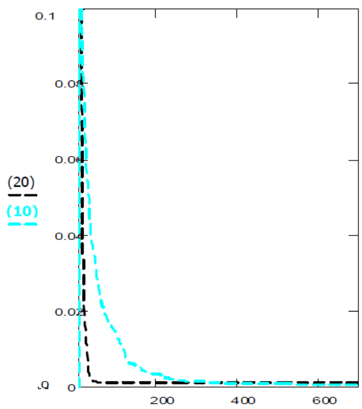


Рис. 1. Сравнение свойств сходимости (поведения квадрата нормы ошибки идентификации (формула (3)) алгоритма (10) (светлая кривая) и алгоритма (20) (черная кривая) при нулевом начальном приближении

При этом свойство ортогональности вектора текущей оценки и вектора текущей ошибки идентификации является постоянным и строго соблюдается на каждом шаге работы алгоритма (10).

Однако даже незначительные нарушения условия (5), которые также можно рассматривать как одну незначительную ошибку при наблюдении за входным или выходным сигналом, могут привести к расходимости алгоритма (10). Так, на рис. 2 показано поведение значения $\left(\theta^* - \theta(t)\right)^T \theta(t)$ в алгоритме (10) при заданном векторе начального приближения, все его компоненты которого равны $10^{-6}$.

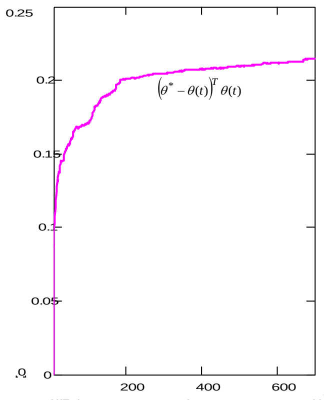


Рис. 2. Значение $\left(\theta^* - \theta(t)\right)^T \theta(t)$ в алгоритме (10) при ненулевом начальном приближении

Таким образом, представленные результаты моделирования позволяют сделать вывод о том, что алгоритм (10) обладает свойствами сходимости, которые (в общем случае) превосходят свойства алгоритма (20). Однако алгоритм (10) чувствителен к выбору начального приближения и, следовательно, даже к незначительным ошибкам экспериментальных данных. Этот факт можно объяснить, используя следующие простые выводы.

На рис. 3 соответственно показано поведение значения, $\left(\theta^* - \theta(t)\right)^T \left(\theta^* - \theta(t)\right)$ полученного по алгоритму (10) (светлая кривая) и полученного по алгоритму (20) (черная кривая) при ненулевом начальном приближении, изложенном выше.

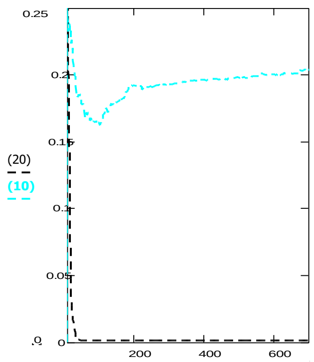


Рис. 3. Сравнение свойств сходимости алгоритма (10) (светлая кривая) и алгоритма (20) (черная кривая) при ненулевом начальном приближении

Формулы (13), (14), (17) выведены согласно условию (5). При нарушении условия (5) квадрат левой и правой частей формулы (13) принимает вид (при условии, что $\delta(t) > 0$ (этот частный случай значение для этого рассмотрения, так как в противном случае алгоритм (10) будет таким же, как алгоритм Качмажа)):

$$\eta^T(t)\eta(t) = \eta^T(t-1)\left(\mathrm{I} - \delta^{-1}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\right)\eta(t-1). \qquad (21)$$

В формуле (21) используются следующие обозначения: $\eta(t) = \theta(t) - \theta^*$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \theta^T(t-1)\theta(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t) -$$
$$-\theta^T(t-1)\varphi(t)\varphi(t)\theta^T(t-1) - \theta^T(t-1)\varphi(t)\theta(t-1)\varphi^T(t).$$

Таким образом, решение вопроса о сходимости алгоритма (10) заключается в признании неотрицательности следующей квадратичной формы:

$$\eta^T(t-1)\boldsymbol{\omega}(t)\eta(t-1), \qquad (22)$$

или, эквивалентно, признать неотрицательную определенность квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta^T(t-1)\theta(t-1) & -\theta^T(t-1)\varphi(t) \\ -\theta^T(t-1)\varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где $v_1 = \eta^T(t-1)\varphi(t)$, $v_2 = \eta^T(t-1)\theta(t-1)$ рассматриваются как переменные квадратичной формы. Но по критерию Сильвестра квадратичная форма (23) отрицательно определена. Таким образом, даже единичное или «совсем незначительное» нарушение условия (5) может привести к расходимости алгоритма (9). С другой стороны, пока обеспечена точность, как наблюдений, так и вычислений, алгоритм (9) может быть вполне приемлемым.

## V. Заключение

В статье обсуждается одношаговый рекуррентный алгоритм. Он, впервые формально выведенный в книге [2], классифицируется как алгоритм с неубывающим матричнозначным шагом, обобщая известный алгоритм Качмажа [1]. При этом результаты, полученные в книге [2], были тщательно рассмотрены и проанализированы. Такой анализ позволил уточнить аналитическое выражение данного алгоритма идентификации, показать его сильную состоятельность и уточнить условия его применения. Были рассмотрены результаты моделирования, подтверждающие представленные теоретические выводы, и проведено сравнение с известной модификацией алгоритма Качмажа [3].

## Список литературы

[1] Kaczmarz S. Approximate solution of systems of linear equations // International Journal of Control. 1993. Vol. 57. P. 1269-1271.

[2] Теплогидравлические модели оборудования электрических станций / Под ред. Г.А. Филиппова и Ф.Ф. Пащенко. М.: Физматлит,, 2013. 448 с. ISBN 978-5-9221-1518-6.

[3] Аведьян А.Д. Модифицированные алгоритмы Качмажа для оценки параметров линейных объектов // Автоматика и телемеханика. 1978. № 5. С. 64-72.