

# Робастный цифровой фильтр Калмана в задачах демодуляции сигналов в системах ММО

Е. И. Глушанков, Д. А. Цветков

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича  
glushankov57@gmail.com, mitya.tsvetkov.1@mail.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрено применение фильтра Калмана для демодуляции в системах ММО. Показано, что для обеспечения устойчивой работы фильтра при отклонениях параметров модели от параметров алгоритма фильтрации, целесообразно применение робастного фильтра Калмана.

**Ключевые слова:** фильтр Калмана, демодуляция, робастный фильтр, стохастическое дифференциальное уравнение

## I. ВВЕДЕНИЕ

Одними из наиболее распространенных алгоритмов демодуляции в системах ММО являются алгоритмы, оптимальные по критерию минимума среднеквадратической ошибки (МСКО) [1, 2]. В этих алгоритмах модель наблюдаемого сигнала на приёмной стороне можно записать в виде:

$$Y(t) = HX(t) + \eta(t), \quad (1)$$

где  $Y(t) - N$  – мерный вектор принимаемых сигналов,  $H - N \times M$  матрица комплексных коэффициентов передачи канала связи (матрица канала),  $X(t) - M$  – мерный вектор переданных сигналов,  $\eta(t) - N$  – мерный вектор белого гауссовского шума с матрицей спектральных плотностей мощности (СПМ)  $N_\eta(t)$ . Размерность матриц определяется, исходя из количества приемных ( $N$ ) и передающих ( $M$ ) антенн.

Как предложено в [3], запишем модель изменения во времени вектора переданных символов на входе приемных антенн в виде следующего стохастического дифференциального уравнения (СДУ), называемого уравнением состояния:

$$dX(t)/dt = F(t)X(t) + G(t)w(t), \quad (2)$$

где  $F(t)$  и  $G(t)$  – известные  $M \times M$  – матрицы,  $w(t) - M$  – мерный векторный белый шум со СПМ  $N_w(t)$ . Методика определения параметров многомерных СДУ  $F(t)$  и  $G(t)$  предложена в [4, 5], и здесь они считаются известными.

Для случая задания моделей в виде уравнения наблюдения (1) и состояния (2) оценивание принимаемых сигналов, аппроксимируемых гауссовским случайным процессом, возможно с использованием цифрового фильтра Калмана, что подробно рассмотрено в [3]. Там же проанализирована чувствительность фильтра к отклонению параметров модели (1) – (2) от реальных данных и в случае небелого шума наблюдения.

Рассмотрим возможность применения робастного фильтра Калмана для обеспечения устойчивости работы фильтра при подобных отклонениях параметров.

## II. РОБАСТНЫЙ ФИЛЬТР

В работах [3, 6, 7] показано, что при выполнении условий

$$P(0) \geq P(0), \quad (3)$$

$$N_\eta(t) \geq N_\eta(t), \quad (4)$$

$$N_w(t) \geq N_w(t), \quad (5)$$

где  $P(0)$  – дисперсия ошибки оценивания фильтра Калмана в начальный момент времени,  $N_\eta(t)$  и  $N_w(t)$  – СПМ шумов наблюдения в (1) и состояния в (2) принятые при моделировании,  $P(0)$ ,  $N_\eta(t)$ ,  $N_w(t)$  – эти же параметры, принятые при синтезе фильтра. Поэтому, выбирая для синтеза фильтра Калмана наибольшие возможные значения  $P(0)$ ,  $N_\eta(t)$ ,  $N_w(t)$  из диапазона априорной неопределенности, мы будем гарантированы, что дисперсия действительной ошибки ограничена известным пределом  $P(t)$ .

Данная идея и лежит в основе синтеза робастных фильтров Калмана [7]. Переходя от непрерывного [7] к цифровому фильтру Калмана, получим следующие выражения, описывающие робастный цифровой фильтр:

$$X(j) = F(j, j-1)X(j-1) + K(j)[Y(j) - H(j)F(j, j-1)X(j-1)]$$

$$K(j) = P_x(j | j-1)H^T(j)[H(j)P_x(j | j-1)H^T(j) + P_v(j)]^{-1} = P_x(j)H^T(j)P_v(j)$$

$$P_x(j+1 | j) = F(j+1, j)P_x(j)F^T(j+1, j) + G(j)P_w(j)G^T(j).$$

$$P_x(j) = [I - K(j)H(j)]P_x(j | j-1)$$

где  $K(j)$  – коэффициент усиления фильтра Калмана,  $P_x(j)$  – дисперсия ошибки оценивания.

## III. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА

Результаты анализа робастного фильтра Калмана представлены на рисунке, где показан проигрыш робастного фильтра по сравнению с оптимальным по

значению приращения следа матрицы дисперсии ошибки оценивания  $\text{tr}\Delta P$  в зависимости от отклонения СПМ шума наблюдения (красная кривая) и шума состояния (синим цветом).

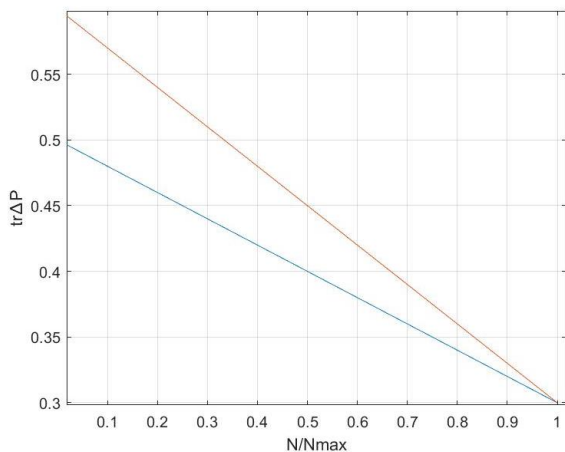


Рис. 1. Зависимость дисперсии ошибки оценивания от спектральной плотности мощности шума

Из результатов анализа видно, что при максимальных значениях спектральной плотности мощности шумов эффективность робастного фильтра совпадает с эффективностью оптимального фильтра Калмана, оцениваемой по дисперсии ошибки. При отклонениях же СПМ от максимального значения эффективность робастного фильтра уменьшается по сравнению с оптимальным, но остается вполне приемлемой для практического применения.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Робастный фильтр Калмана показал высокую эффективность в задачах демодуляции, что делает возможным его применение в сложной сигнально-помеховой обстановке. По сравнению с другими фильтрами он оказался менее чувствительным к неточности задания моделей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бакулин М.Г., Варукина Л.А., Крейнделин В.Б. Технология ММО: принципы и алгоритмы. М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 244 с.
- [2] Смирнов А.Э. Исследование и разработка алгоритмов обработки сигналов в системах беспроводной связи с большим количеством антенн: Дис... канд. техн. наук / М.: МТУСИ, 2019. 159 с.
- [3] Глушанков Е.И., Кирик Д.И., Цветков Д.А., Курбатова Е.А. Алгоритмы демодуляции для систем ММО, основанные на псевдообращении канальной матрицы и модифицированном фильтре Калмана // Электросвязь, 2022, № 9, с. 23–26.
- [4] Глушанков Е.И., Кирик Д.И., Лялина А.Ж. Моделирование и оценивание параметров частично-когерентных сигналов в радиотехнических системах // Труды учебных заведений связи, 2021, Том 7, № 3, с. 16–24.
- [5] Glushankov E.I., Lyalina A., Rylov E.A. Modeling the satellite communication channel based on stochastic differential equations // CEUR Workshop Proceedings, Vol.-2922. P. 52-59.
- [6] Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.
- [7] Тиханов В.И., Харисов В.Н., Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.