Место «Золотого» сечения в распределении вероятностей для модели системы массового обслуживания M/M/1/r

С. А. Ясинский, Л. В. Воробьев, А. В. Селезнев

Военная академия связи

yasinsky777@mail.ru

***Аннотация*. В статье произведен анализ вероятности нахождения системы обслуживания $M/M/1/r$ в разных состояниях и определены соответствующие этим состояниям закономерности, одна из которых соответствует «золотой» геометрической прогрессии.**

Ключевые слова: система обслуживания, состояния системы, «золотое» сечение

Задана одноканальная ($\nu = 1$) система массового обслуживания (СМО) со стационарным, ординарным потоком заявок (пакетов) без последействия с параметром λ на входе (M) и экспоненциальным распределением вероятности времени занятия с параметром потока обслуживания $\mu = 1/t_0$ (M), где $t_0 = 1\,у.е.$ – средняя длительность обслуживания сервером одной заявки (пакета) в виде заданной условной единицы времени [1, 2]. Такую СМО принято условно обозначать как $M/M/\nu = 1/r$, где r – число мест для ожидания в очереди (объем буфера памяти).

На основе известных из теории телетрафика математических моделей распределения вероятностей для $M/M/1/r$ требуется произвести более точный анализ стационарного распределения P_i вероятностей нахождения СМО в i-м состоянии из множества возможных ($i = \overline{0, I}$), которое определяется числом ячеек памяти буфера, как функции от интенсивности поступающих заявок (пакетов) на его входе.

Исходные данные [1, 2]:

так как поток заявок (пакетов) простейший, то $\lambda_{i+1} = \lambda, i = \overline{0, I}$;

так как сервер один, то $\mu_{i+1} = \mu, i = \overline{0, I}$;

показатель интенсивности поступающей нагрузки на сервер $\rho = \lambda / \mu$;

так как очередь конечная ($r = I$), то с учетом процесса рождения и гибели выполняются ограничения: $\rho < 1$; $\lambda_i < \mu_{i+1}$; $\lambda < \mu$;

среднее число ожидаемых заявок (пакетов) в очереди

$$N_\gamma = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (1)$$

Запишем выражение (1) в виде приведенного квадратного уравнения

$$\rho^2 + N_\gamma \rho - N_\gamma = 0,$$

с положительным корнем

$$\rho_1 = \frac{-N_\gamma + \sqrt{N_\gamma{}^2 + 4N_\gamma}}{2}. \qquad (2)$$

Парето-оптимальное решение (2) может быть получено в единственном случае, когда $N_\gamma = 1$. Физический смысл этой парето-оптимальности заключается в синхронности поступающих заявок (пакетов) с обработкой сервером без задержки при $N_\gamma = 1$. То есть когда каждая из поступающих на входе СМО заявок (пакетов) обслуживается сервером без очереди, но при этом обеспечивается максимальная (потенциальная) интенсивность обслуживания (производительность) сервера, так как он постоянно находится в состоянии обслуживания и без накопления заявок (пакетов) в очереди.

С учетом дискретности средней длительности обслуживания сервером одной заявки ($t_0 = 1\,у.е.$) могут быть два направления изменения ρ_1, как функции от N_γ, то есть когда $\rho(N_\gamma)_1$ отличается от парето-оптимального значения $\rho_{opt}(N_\gamma = 1)_1$. То есть, при $N_\gamma \neq 1$ парето-оптимальность может нарушаться в следующих двух случаях:

$N_\gamma = \overline{2, M}$ – в буфере СМО образуется очередь из-за роста интенсивности поступающих заявок (пакетов), а потенциальная производительность сервера постоянная, то есть она не меняется в сравнении со случаем при $N_\gamma = 1$;

$N_\gamma = \overline{1/2, 1/M}$ – в буфере СМО очередь отсутствует из-за снижения интенсивности поступающих заявок, что приводит к снижению производительности сервера относительно потенциального (максимального) значения, то есть она уменьшается в сравнении со случаем при $N_\gamma = 1$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов $\rho(N_\gamma)_1$ по формуле (6), при $N_\gamma = \overline{1,5}$ и $N_\gamma = \overline{1/1,1/5}$.

ТАБЛИЦА I. Результаты расчетов $\rho(N_\gamma)_1$, при $N_\gamma = \overline{1,5}$ и $N_\gamma = \overline{1/1,1/5}$

$N_\gamma = \overline{1,5}$	$\rho(N_\gamma = \overline{1,5})_1$	$N_\gamma = \overline{1/1,1/5}$	$\rho(\overline{1/1,1/5})_1$
	0,61803398..	1/1=1	0,61803398…
	0,73205080..	1/2	0,5
	0,79128784..	1/3	0,43425854…
	0,82842712..	1/4	0,39038820…
	0,85410196..	1/5	0,35825756…

Анализ полученных результатов в табл. 1 показал:

$N_\gamma = 1$ – соответствует парето-оптимальному значению $\rho_{opt}(N_\gamma = 1)_1 = 0,61803398... = \bar{\Phi}$, находящемуся в рамках диапазона $0 < \rho_{opt}(N_\gamma = 1)_1 < 1$, где $\bar{\Phi}$ – обратное значение «золотого» сечения $\Phi = 1/\bar{\Phi} = 1,61803398...$ [3, 4];

$N_\gamma = \overline{2,M}$ – имеет место линейная зависимость $\rho(N_\gamma)_1$;

$N_\gamma = \overline{1/2,1/M}$ – линейная зависимость $\rho(N_\gamma)_1$ нарушается.

Полученные с помощью выражения (2) результаты расчетов могут быть использованы в качестве исходных данных для проведения анализа вероятностей нахождения СМО *M/M/*$1/r$ в i-х состояниях.

Так как случайный марковский процесс соответствует известному процессу гибели и размножения, а в нашем случае сервер один, то вычисление вероятности нахождения СМО в i-м состоянии из множества $i = \overline{0,I}$ производится по формуле [1, 2]:

$$P_i(\rho(N_\gamma)_1) = P_0 * \rho^i(N_\gamma)_1 = \rho^i(N_\gamma)_1 * (1 - \rho(N_\gamma)_1). \quad (3)$$

Для примера в табл. 2 приведены результаты расчетов $P_i(\rho(N_\gamma)_1)$ по формуле (3) при *i*=0,…,4 для нескольких значений $\rho(N_\gamma)_1$: 0,3; 0,5; 0,8; $0,61803398... = \bar{\Phi}^1$.

ТАБЛИЦА II. Результаты расчетов $P_i(\rho(N_\gamma)_1)$ по (3) при $i = 0,...,4$ для нескольких значений $\rho(N_\gamma)_1$

i	$P_i(\rho(N_\gamma)_1)$			
	$\rho(N_\gamma)_1 = 0,3$	$\rho(N_\gamma)_1 = 0,61803398... = \bar{\Phi}^1$	$\rho(N_\gamma)_1 = 0,5$	$\rho(N_\gamma)_1 = 0,8$
0	0,7	$0,38196601... = \bar{\Phi}^2$	$0,5 = \bar{S}^1$	0,2
1	0,21	$0,23606797... = \bar{\Phi}^3$	0,25	0,16
2	0,063	$0,14589803... = \bar{\Phi}^4$	0,125	0,128
3	0,0189	$0,09016994... = \bar{\Phi}^5$	0,0625	0,1024
4	0,00567	$0,05572808... = \bar{\Phi}^6$	0,03125	0,08192

Анализ результатов расчетов в табл. 2 показал:

- по мере роста порядкового номера состояний СМО все вероятностные экспоненциальные зависимости обслуживаемых заявок (пакетов) выравниваются между собой, не превышая нескольких процентов (группируются в пучок) относительно максимально возможного значения;
- если продолжить вычисления значений $P_i(\rho(N_\gamma)_1)$ в каждой колонке табл. 2, при условии $i \to \infty$, а затем все значения просуммировать, то получим сумму членов бесконечной геометрической прогрессии (ГП), которая в пределе сходится к единице, то есть

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(\rho(N_\gamma)_1) = 1. \quad (4)$$

Однако, реально на практике число состояний конечно (конечная очередь), тогда выражение (4) можно представить в следующем уточненном виде:

$$\sum_{i=0}^{I} P_i(\rho(N_\gamma)_1) < 1. \quad (5)$$

Например, для $\rho(N_\gamma)_1 = 0,61803398... = \bar{\Phi}^1$ в соответствующей колонке табл. 2 с использованием (5) получим

$$\sum_{i=0}^{I=4} P_i(\rho(N_\gamma)_1) = \bar{\Phi}^2 + \bar{\Phi}^3 + \bar{\Phi}^4 + \bar{\Phi}^5 + \bar{\Phi}^6 = 0,909830... < 1,$$

хотя в теоретическом плане в соответствии с формулой (4) для членов «золотой» ГП имеет место бесконечный предел сходящейся суммы: $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Phi}^{i+2} = 1$ [4, 5].

Таким образом, для парето-оптимального значения средней длины очереди, когда $N_{\gamma} = 1$ и $t_0 = 1\,у.е.$, получено устойчивое соотношение между поступающими вызовами (пакетами) в буфер и их обслуживанием сервером, но без отказов в обслуживании с максимально возможной производительностью обслуживания. Это парето-оптимальное значение находится на границе перехода между натуральными числами и обратными им значениями (дробями) относительно $N_{\gamma} = 1$, а так же характеризуется зависимостью параметров качества СМО $M/M/1/r$ от «золотого» сечения и «золотой» ГП.

Кроме этого, в результате анализа вероятности нахождения СМО $M/M/1/r$ в i-х состояниях определены соответствующие этим состояниям закономерности.

Список литературы

[1] Шнепс М.А. Системы распределения информации / М.А. Шнепс. М.: Связь, 1979. № 2. 344 с.

[2] Пшеничников А.П. Теория телетрафика / А.П. Пшеничников. М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 212 с.

[3] Ясинский С.А. Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей и место в ней «золотого» сечения / С.А. Ясинский. СПб.: ВАС, 2006. 124 с.

[4] Ясинский С.А. «Золотое» сечения в стандартизации и теории измерения / С. А. Ясинский. СПб.: СПб.: ВАС, 2008. 160 с.