Солитонные решения, нелокального в пространстве и времени, уравнения синус-Гордона

А. А. Белокур, В. В. Перепеловский
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
belockur.alexander@yandex.ru, vvperepelovskii@etu.ru

***Аннотация*. Рассмотрено нелокальное обобщение уравнения синус-Гордона в пространственной и временной областях. Нелокальность реализована производными дробного порядка по координате и времени. Дифференциальные операторы дробного порядка представлены в обобщении Грюнвальда–Летникова. Численный анализ нелокального уравнения синус-Гордона показал зависимость скорости солитона как от порядка пространственной производной, так и от порядка производной по времени.**

Ключевые слова: производная Грюнвальда–Летникова; производная дробного порядка; нелокальное уравнение Синус-Гордона; дробная производная Рисса

I. Введение

Классическое уравнение синуса-Гордона (УСГ) [1] является одним из основных уравнений современной нелинейной волновой теории. Уравнение синуса-Гордона возникает в различных областях физики, таких как нелинейная оптика, теория джозефсоновских переходов, теория поля и теория решеток [2]. В данных разделах физики уравнение синус-Гордона обеспечивает простейшее нелинейное описание физических явлений в различных конфигурациях. Теория, методы решения и применение пространственного дробного дифференцирования синус-Гордона подробно обсуждаются в двух книгах [3, 4]. Чтобы еще больше акцентировать внимание на анализе односолитонных и двухсолитонных решений, можно сослаться на [5]. Одно из нелокальных обобщений УСГ, учет пространственной нелокальности, было предложено в [6]:

$$u_{tt} - {}^{R}D_x^{\alpha} u + \omega^2 \sin u = 0, \tag{1}$$

где ${}^{R}D^{\alpha}$ – дробная производная Рисса [6]. Для предельного случая при $\alpha = 2$ уравнение (1) сводится к классическому УСГ. При $\alpha = 1$ уравнение (1) переходит в уравнение для задач нелокальной электродинамики Джозефсона [7–12].

Нелокальные обобщения уравнения синус-Гордона так же рассматривались в работах [13, 14].

Двойная нелокальность, описываемая а рамках формализма дифференциальных операторов дробного порядка, рассматривается работе [15]. В работе приводится анализ классического волнового уравнения с операторами дробного дифференцирования по времени и по пространственной координате для создания модели аномальной диффузии [16–18].

В данной работе будет рассмотрено УСГ с пространственной и временной нелокальностью в рамках формализма дифференциальных операторов дробного порядка:

$$D_t^{\beta} u(x,t) - c^2 RD_x^{\alpha} u(x,t) + \omega^2 \sin(\Omega u(x,t)) = 0 \tag{2}$$

где оператор D_t^{β} оператор дробной производной по времени в представлении Грюнвальда–Летникова [19] $0 \le \beta \le 2$, RD_x^{α} – оператор дробной производной по переменной x в представлении Грюнвальда–Летникова для краевой задачи, $1 < \alpha \le 2$, u – решение уравнения УСГ, c, ω, Ω – параметры УСГ. Производная дробного порядка по координате учитывает пространственную нелокальность. Производная дробного порядка по времени позволяет учесть «эффект памяти».

Далее кратко представим определение дробной производной для численного решения рассматриваемой краевой задачи (2). Левые и правые производные в определении Грюнвальда–Летникова [19] для функции *f(x)* на промежутке от 0 до N, $1 < \alpha \le 2$ представим следующим образом:

$${}_{left}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Delta x^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} b_k f(x - k\Delta x),$$

$${}_{right}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Delta x^{\alpha}} \sum_{k=n}^{N} b_k f(x + k\Delta x),$$

где $n = 1, 2, \ldots, N-1$, b_k – это биномиальные коэффициенты, рассчитанные следующим образом:

$$b_k = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)},$$

где k – номер узла конечно-разностного представления производных, Γ – гамма-функция.

Двустороннюю дробную производную, соответствующую краевой задачи определим следующим образом:

$$RD_x^{\alpha} f(x) = \frac{-1}{2\cos(\alpha\pi/2)} \left[{}_{left}D_x^{\alpha} f(x+\Delta x) + {}_{right}D_x^{\alpha} f(x-\Delta x) \right],$$

$$\alpha > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \dots .$$

II. Моделирование и результаты

A. *Параметры задачи*

Численное решение уравнения (2) реализовано в среде MATLAB. Моделирование солитонного решение УСГ с двойной нелокальностью проводилось при следующих параметрах УСГ:

$$c = 1, \quad \omega = 10, \quad \Omega = 0.0005.$$

Значение u(x,t) на границах интервала интегрирования:

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \ u(x,t)|_{x=N} = 0.$$

Начальный профиль и начальная скорость волны определяется следующим образом:

$$u(x,t)|_{t=1} = \exp(-((20/L)\cdot(x-L/2))^2),$$

$$v(x,t)|_{t=1} = 0,$$

где L – область определения УСГ

$$L = (N-1)\cdot\Delta x$$

B. *Результаты*

Проведенный численный анализ уравнения (2) показал:

1. Уменьшение порядка дробной производной от 2-х до величины близкой к единице приводит к возрастанию скорости солитона.
2. При β=1 решение солитонного типа не образуется
3. При изменении α в диапазоне ($1 < \alpha \leq 2$) и $\beta = 1.9$, наблюдается уменьшение скорости солитона относительно случая $\beta = 2$ и соответствующих α. При дальнейшем уменьшении параметра β нелинейный волновой пакет подвергается выраженной диффузии, вследствие чего происходит дисперсионное уширение и затухание нелинейного волнового пакета.

III. Заключение

В данной статье рассмотрены солитонные решения, нелокального в пространстве и времени, уравнения синус-Гордона. Численное моделирование уравнения синус-Гордона показало влияние двойной нелокальности на солитонные решения, а именно зависимость скорости распространения солитона от степени нелокальности в пространстве и времени.

Список литературы

[1] Wazwaz A.M., Wazwaz A.M. Solitary waves theory //Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. 2009. C. 479-502.

[2] Dodd R. K. et al. Solitons and nonlinear wave equations. 1982.

[3] Debnath L., Debnath L. Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers. Boston : Birkhäuser, 2005. C. 528-529.

[4] Newell A. C, Nonlinear Optics Addition-Wesley, New York. 1992.

[5] Saha Ray S. Numerical solutions and solitary wave solutions of fractional KDV equations using modified fractional reduced differential transform method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Т. 53. №. 12. С. 1870-1881.

[6] Alfimov G., Pierantozzi T. and Vázquez L. Fractional Differentiation and Its Applications, FDA 2004, Workshop Preprints/ Proceedings, 2004-1, C. 153–162.

[7] Ivanchenko Y.M., Soboleva T.K. Nonlocal interaction in Josephson junctions // Physics Letters A. 1990. Т. 147. №. 1. С. 65-69.

[8] Gurevich A. Nonlocal Josephson electrodynamics and pinning in superconductors //Physical Review B. 1992. Т. 46. №. 5. С. 3187.

[9] Barone A., Paterno G. Physics and applications of the Josephson effect. New York : Wiley, 1982. Т. 1.

[10] Aliev Y.M., Silin V.P. Travelling 4π-kink in nonlocal Josephson electrodynamics // Physics Letters A. 1993. Т. 177. №. 3. С. 259-262.

[11] Aliev Y.M. et al. Nonlocal Josephson electrodynamics of layered structures // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1995. Т. 80. №. 3. С. 551-559.

[12] Alfimov G.L., Silin V.P. On small perturbations of stationary states in a nonlinear nonlocal model of a Josephson junction // Physics Letters A. 1995. Т. 198. №. 2. С. 105-112.

[13] Cunha M.D., Konotop V.V., Vázquez L. Small-amplitude solitons in a nonlocal sine-Gordon model // Physics Letters A. 1996. Т. 221. №. 5. С. 317-322.

[14] Vazquez L., Evans W.A.B., Rickayzen G. Numerical investigation of a non-local sine-Gordon model // Physics Letters A. 1994. Т. 189. №. 6. С. 454-459.

[15] Мороз Л.И., Масловская А.Г. Дробно-дифференциальная модель процесса теплопроводности сегнетоэлектрических материалов в условиях интенсивного нагрева // Математика и математическое моделирование. 2019. №. 2. С. 29-47.

[16] Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. №. 4. С. 660-670.

[17] Ревизников Д.Л., Сластушенский Ю.В. Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале // Математическое моделирование. 2013. № 5. С. 3–14. Математика и математическое моделирование, 2019, №2 42.

[18] Овсиенко А.С. Идентификация параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных уравнений //Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. №. 1. С. 65-73.

[19] Мороз Л.И. Дробно-дифференциальный подход к численному моделированию динамических откликов сегнетоэлектриков как фрактальных физических систем: Автореф. дис. … канд.физ.-мат. наук / Амурский государственный университет. 2021.