Исследование критического поведения полностью фрустрированных джозефсоновских решёток методом ренормализационной группы

К. Б. Варнашев
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
k.varnashev@mail.ru

***Аннотация.* Методом ренормализационной группы (РГ) в фиксированной размерности пространства (*D*=3) изучено критическое поведение теоретико-полевой модели с двухкомпонентным комплексным полем параметра порядка, описывающей фазовый переход сверхпроводник-диэлектрик в квадратных и треугольных джозефсоновских решётках при нулевой температуре. Как известно, вследствие квантовых флуктуаций, такие системы оказываются эффективно трёхмерными. РГ разложения для *β*-функций и критических индексов модели вычислены в виде рядов по инвариантным зарядам в рамках четырёхпетлевого приближения. Путём пересуммирования полученных разложений методом Паде–Бореля, определены положения фиксированных точек уравнений РГ и вычислены индексы их устойчивости, управляющие поведением траекторий РГ потоков в их окрестностях. На основе проведённого численного анализа установлено, что фазовый переход сверхпроводник-диэлектрик в полностью фрустрированных джозефсоновских решётках при *T*=0, имеющих квадратную и треугольную структуру, является исключительно переходом первого рода, аномальное поведение термодинамических функций которого контролируется набором эффективных критических индексов.**

Ключевые слова: джозефсоновская решётка; сверхпроводник; флуктуационный гамильтониан; ренормализационная группа; фазовый переход; критическое поведение

I. Модельный Гамильтониан

Как известно, основные особенности фазовых переходов в полностью фрустрированных джозефсоновских решётках могут быть описаны гамильтонианом следующего вида [1]:

$$H = -\frac{E_c}{2}\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)^2 - E_J\sum_{(ij)}\cos(\theta_i-\theta_j-A_{ij}), \qquad (1)$$

где θ_i – фаза сверхпроводящего поля параметра порядка в *i*-ом островке. Векторный потенциал внешнего магнитного поля $\boldsymbol{A}_{ij}$ и квант магнитного потока Φ_0 связаны соотношением

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{\Phi_0}\int_i^j \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{l}$$

Роль энергии заряда, отвечающей за кулоновскую блокаду на сверхпроводящих островках и квантовую динамику, играет энергия E_C. В то же время константа джозефсоновского взаимодействия E_J отвечает за установление глобальной фазовой когерентности и, следовательно, сверхпроводимости во всей системе. Когда при нулевой температуре отношение $f = E_c / E_J$ превышает некоторое критическое значение, в решётке с джозефсоновскими контактами происходит фазовый переход сверхпроводник-диэлектрик. Поскольку в рассматриваемом случае (T = 0**)** квантовые флуктуации оказываются существенными, то эффективно система ведёт себя как трёхмерная, D = 2+1 [2].

В случае, когда внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}$ однородно, джозефсоновские решётки оказываются регулярно фрустрированными с параметром фрустрации $f = (Ba_0)/\Phi_0$, где a_0 – площадь плакеты (ячейки). В нашей работе мы будем исследовать джозефсоновские решётки с квадратной и треугольной структурой в магнитном поле, соответствующем параметру фрустрации f = 1/2. Такие джозефсоновские решётки обычно называют полностью фрустрированными.

Для того, чтобы изучить критическое поведение упомянутых выше систем методом ренормализационной группы, микроскопический гамильтониан (1) необходимо трансформировать во флуктуационный гамильтониан Ландау–Вильсона. Это достигается путём преобразования выражения (1) методом Хаббарда–Стратоновича [2–5]. В итоге, модельный гамильтониан (1) переписывается в виде, где часть, отвечающая взаимодействию (члены четвёртого порядка по полю параметра порядка) даётся следующим выражением

$$u\left(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\right)^2 - v_1|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + v_2\,\mathrm{Re}\left(\psi_1^*\psi_2\right)^2. \qquad (2)$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 – комплексные скалярные поля. Случаю квадратных джозефсоновских решёток отвечают значения констант $u > 0$ и $v_1 = v_2 > 0$, тогда как в случае треугольных решёток константы взаимодействия имеют значения $u > 0$ и $v_1 < 0$, $v_2 = 0$.

Далее, нам будет удобнее работать с обобщённым флуктуационным гамильтонианом вида [6, 7]:

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\left(m_0^2 \psi_i \psi_i^* + \vec{\nabla}\psi_i \vec{\nabla}\psi_i^* \right) + \frac{u_0}{4}\psi_i \psi_i^* \psi_j \psi_j^* + \frac{v_0}{4}\psi_i \psi_i \psi_i^* \psi_i^* + \frac{w_0}{4}\psi_i \psi_i \psi_j^* \psi_j^* \right\}, \tag{3}$$

который описывается N-компонентным комплексным полем параметра порядка ψ_i; i, j = 1, …, N. Здесь $m_0^2 \sim T - T_c^{(0)}$; $T_c^{(0)}$ – температура фазового перехода в приближении среднего поля; u_0, v_0, w_0 – затравочные константы связи, являющиеся количественными характеристиками изотропного, кубического и «кирального» взаимодействий, соответственно. Нетрудно показать, что выражение (2) в точности совпадает с частью взаимодействия модельного гамильтониана (3), если учесть, что при N = 2 константы взаимодействия обоих выражений связаны друг с другом простыми соотношениями

$$u = u_0 + v_0 + w_0, \quad v_1 = 2(v_0 + w_0), \quad v_2 = 2w_0 .$$

Таким образом, случаю квадратных и треугольных полностью фрустрированных джозефсоновских решёток в модели (3) отвечают области $v_0 = 0$, $w_0 > 0$ и $v_0 < 0$, $w_0 = 0$, соответственно. При этом число компонент поля параметра порядка равно двум ($N = 2$).

Уместно отметить, что модельный гамильтониан (3) контролирует также критическое поведение треугольных полностью фрустрированных джозефсоновских решёток с параметром фрустрации $f = 1/4$, так как, известно, что такие системы принадлежат к тому же классу универсальности, что и джозефсоновские решётки с квадратной решёткой [5].

II. РГ разложения и симметрия флуктуационного гамильтониана

Ниже мы приводим РГ разложения для β-функций модели (3) как функций перенормированных инвариантных зарядов u, v и w в рамках четырёх-петлевого приближения [8] в интересующем нас случае, когда число компонент поля параметра порядка равно двум.

$$\begin{aligned}
\beta_u &= u - u^2 - \frac{2}{3}(uv + uw + w^2) + \frac{1}{144}(52.444444u^3 \\
&+59.259259u^2(v+w) + u(13.629630v^2 + 27.259259vw \\
&+91.259259w^2) + 42.666667w^2(v+w) - \frac{1}{1728}(440.98501u^4 \\
&+764.80545u^3(v+w) + u^2(452.67473v^2 + 905.34946vw \\
&+1582.9846w^2) + u(101.00161v^3 + 303.00483v^2w \\
&+1390.4543vw^2 + 1188.4510w^3) + 220.84067v^2w^2 \\
&+441.68135vw^3 + 146.31831w^4) + \frac{1}{20736}(4805.4536u^5 \\
&+1.1083281\cdot 10^4 u^4(v+w) + 10^4 u^3(1.0017349v^2 \\
&+2.0034698vw + 2.7362827w^2) + u^2(4385.2707v^3 \\
&+1.3155812\cdot 10^4 v^2w + 3.7699983\cdot 10^4 vw^2 \\
&+2.8929441\cdot 10^4 w^3) + u(779.02590v^4 + 3116.1036v^3w \\
&+1.5284535\cdot 10^4 v^2w^2 + 2.4336864\cdot 10^4 vw^3 \\
&+1.1935322\cdot 10^4 w^4) + 1495.1163v^3w^2 + 4485.3489v^2w^3 \\
&+4750.6368vw^4 + 1760.4041w^5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_v &= v - \frac{1}{6}(6uv + 5v^2 + 8vw) + \frac{1}{144}(68.444445u^2v \\
&+u(107.25926v^2 + 155.25926vw) + 40.296296v^3 \\
&+112.59259v^2w + 69.925926vw^2) \\
&- \frac{1}{1728}(616.73187u^3v + u^2(1441.7733v^2 \\
&+2066.7020vw) + u(1158.6662v^3 + 3150.5706v^2w \\
&+2167.7372vw^2) + 314.91694v^4 + 1209.0682v^3w \\
&+1532.1623v^2w^2 + 597.72497vw^3) \\
&+ \frac{1}{20736}(7402.3469u^4v + u^3(2.2711332\cdot 10^4 v^2 \\
&+3.1626554\cdot 10^4 vw) + u^2(2.7325363\cdot 10^4 v^3 \\
&+7.2481170\cdot 10^4 v^2w + 5.0082678\cdot 10^4 vw^2) \\
&+u(1.5117398\cdot 10^4 v^4 + 5.7390672\cdot 10^4 v^3w \\
&+7.4874526\cdot 10^4 v^2w^2 + 3.3055797\cdot 10^4 vw^3) \\
&+3179.2848v^5 + 1.5491468\cdot 10^4 v^4w \\
&+2.8551569\cdot 10^4 v^3w^2 + 2.3362957\cdot 10^4 v^2w^3 \\
&+6835.0586vw^4),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\beta_w &= w - \frac{1}{3}(3uw + vw + w^2) + \frac{1}{144}(68.444445u^2w \\
&+u(59.259259vw + 59.259259w^2) + 8.2962963v^2w \\
&+16.592593vw^2 + 5.9259262w^3) - \frac{1}{1728}(616.73187u^3w \\
&+u^2(816.84459vw + 816.84459w^2) + u(325.42789v^2w \\
&+650.85577vw^2 + 501.26065w^3) + 50.599541v^3w \\
&+151.79862v^2w^2 + 250.86138vw^3 + 149.66230w^4) \\
&+ \frac{1}{20736}(7402.3470u^4w + u^3(1.3796111\cdot 10^4 vw \\
&+1.3796111\cdot 10^4 w^2) + u^2(9494.9202v^2w \\
&+1.8989841\cdot 10^4 vw^2 + 1.4421791\cdot 10^4 w^3) \\
&+u(3078.9210v^3w + 9236.7629v^2w^2 \\
&+1.4227593\cdot 10^4 vw^3 + 8069.7515w^4) + 404.95583v^4w \\
&+1619.8233v^3w^2 + 3565.5230v^2w^3 + 3891.3993vw^4 \\
&+1252.2306w^5).
\end{aligned}$$

В качестве одного из главных критериев проверки полученных нами разложений мы применяем симметрийный анализ выражений (4). Именно, при N = 2 гамильтониан (3) оказывается инвариантным относительно преобразования полей

$$\psi_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2), \qquad \psi_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(i\psi_1 + \psi_2),$$

если одновременно заменить в нём константы взаимодействия в соответствии с правилом [6]:

$$u \to u + v + 2w, \qquad v \to -2w, \qquad w \to -\frac{v}{2}. \tag{5}$$

Это означает, что при таких специфических преобразованиях β-функции модели должны удовлетворять следующим точным соотношениям

$$\beta_u\left(u+v+2w,-2w,-\frac{v}{2}\right) = \beta_u(u,v,w) + \beta_v(u,v,w) + 2\beta_w(u,v,w),$$

$$\beta_v\left(u+v+2w,-2w,-\frac{v}{2}\right) = -2\beta_w(u,v,w), \tag{6}$$

$$\beta_w\left(u+v+2w,-2w,-\frac{v}{2}\right) = -\frac{1}{2}\beta_v(u,v,w).$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (4) действительно удовлетворяют соотношениям (6).

Мы вычислили также критические индексы модели (3). Поскольку в критической области критические показатели связаны друг с другом скейлинговыми соотношениями

$$\gamma = (2-\eta)\cdot\nu, \quad \alpha = 2 - D\cdot\nu, \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

$$\beta\cdot\delta = \beta + \gamma, \quad \delta = \frac{D+2-\eta}{D-2+\eta},$$

где D – пространственная размерность системы, то для нахождения полного набора критических индексов, определяющих степенные законы аномального поведения термодинамических функций в точке фазового перехода, достаточно вычислить какие-либо два из них.

Четырёхпетлевые РГ разложения для критического индекса магнитной восприимчивости γ^{-1}, а также индекса Фишера η имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1} &= 1 - \frac{1}{12}\big(3u + 2(v+w)\big) + \frac{1}{72}\big(3u^2 + 4u(v+w) \\
&+2(v^2+2vw+2w^2)\big) - \frac{1}{1728}\big(49.467569u^3 \\
&+98.935135u^2(v+w) + u(80.905872v^2 \\
&+161.81175vw + 125.75322w^2) + 25.941907v^3 \\
&+77.825722v^2w + 95.854986vw^2 + 43.971171w^3\big) \\
&+\frac{1}{20736}\big(397.42626u^4 + 1059.8034u^3(v+w) \\
&+u^2(1307.9551v^2 + 2615.9101vw + 2052.4103w^2) \\
&+u(838.01404v^3 + 2514.0421v^2w + 3181.5570vw^2 \\
&+1505.5290w^3) + 205.32354v^4 + 821.29416v^3w \\
&+1300.7764v^2w^2 + 958.96448vw^3 + 206.19998w^4\big),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{0.5925926}{144}\big(3u^2 + 4u(v+w) + 2v^2 + 4vw + 4w^2\big) \\
&+\frac{0.1974720}{1728}\big(9u^3 + 18u^2(v+w) + 3u(5v^2 + 10vw \\
&+8w^2) + 5v^3 + 15v^2w + 18vw^2 + 8w^3\big) \\
&+\frac{1}{20736}\big(35.361661u^4 + 94.297762u^3(v+w) \\
&+u^2(115.45524v^2 + 230.91047vw + 178.92766w^2) \\
&+u(73.472429v^3 + 220.41729v^2w + 274.87607vw^2 \\
&+127.93121w^3) + 18.368107v^4 + 73.472429v^3w \\
&+116.77375v^2w^2 + 86.602630vw^3 + 22.637023w^4\big).
\end{aligned} \tag{8}$$

При замене инвариантных зарядов u, v и w в соответствии с правилом (5), выражения (7) и (8) будут удовлетворять приведённым ниже точным соотношениям

$$\gamma^{-1}\left(u+v+2w,-2w,-\frac{v}{2}\right) = \gamma^{-1}(u,v,w),$$

$$\eta\left(u+v+2w,-2w,-\frac{v}{2}\right) = \eta(u,v,w).$$

Очевидно, это также может служить дополнительным критерием проверки полученных разложений.

III. Пересуммирование РГ рядов

Известно, что теоретико-полевые РГ разложения для β-функций и критических индексов представляют собой части расходящихся рядов с асимптотикой вида:

$$F(g) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n, \quad f_n = (-a)^n n! n^b \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \to \infty,$$

где g, параметр разложения в ряд, – обобщённая константа связи; a и b – асимптотические параметры, характеризующие поведение ряда в больших порядках [9]. Для устранения факториальной расходимости ряда используют интегральное преобразование Бореля

$$f_n \to f_n \frac{n!}{n!}, \quad \text{где} \quad n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt.$$

Полученные нами РГ разложения содержат три константы взаимодействия. Следовательно, обобщение преобразования Бореля, на случай рядов с тремя константами связи выглядит [6]:

$$f(u,v,w)=\sum_{i,j,k} c_{ijk}u^i v^j w^k = \int_0^\infty e^{-t}F(ut,vt,wt)dt\,,$$

где для вычисления интеграла необходимо выполнить аналитическое продолжение борелевского образа

$$F(x,y,z)=\sum_{i,j,k}\frac{c_{ijk}}{(i+j+k)!}x^i y^j z^k$$

на полный интервал интегрирования. Для этого обычно используют так называемый резольвентный ряд

$$\tilde{F}(x,y,z;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-l}\frac{c_{l,m,n-l-m}x^l y^m z^{n-l-m}}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}A_n\lambda^n\,,$$

который представляет собой ряд по степеням параметра λ с коэффициентами, являющимися однородными полиномами n-го порядка по константам связи u, v и w. Далее борелевский образ $\tilde{F}(x,y,z;\lambda)$ представляется в виде отношения полиномов (аппроксимант Паде)

$$\tilde{F}(x,y,z;\lambda)=A_n=[L/M]=\left.\frac{P_L(\lambda)}{Q_M(\lambda)}\right|_{\lambda=1}.$$

На практике для обработки РГ рядов наиболее подходящими оказываются аппроксиманты Паде не диагонального типа, такие, например, как [2/1], [3/1] и [4/1] и т. п.

Уместно заметить, что для устранения расходимости типа $n!n^b$ используют более общее интегральное преобразование – преобразование Бореля–Леруа

$$f(u,v,w)=\int_0^\infty e^{-t}t^bF(ut,vt,wt)dt$$

с борелевским образом вида

$$F(x,y,z)=\sum_{i,j,k}\frac{c_{ijk}}{\Gamma(i+j+k+b+1)}x^i y^j z^k\,.$$

Далее, в соответствии с описанной выше процедурой, аналитическое продолжение на всю область интегрирования осуществляется с помощью аппроксимант Паде. Полученные численные результаты оптимизируются затем по асимптотическому параметру b, изменяющемуся в окрестности его точного значения.

В случае же, если ряд не является знакопеременным (в нашем случае это ряд для индекса η), применяют более продвинутую технику суммирования рядов – метод интегрального преобразования Бореля–Леруа с конформным отображением [10].

IV. Численный анализ и выводы

Выполненный нами численный анализ уравнений РГ (4) даёт следующую картину критического поведения модели (3). На фазовой диаграмме РГ потоков имеется восемь неустойчивых в трёхпараметрическом фазовом пространстве (u, v, w) фиксированных точек (одна из них тривиальна; её координаты $u = v = w = 0$). В то же время в плоскостях (u, v) и (u, w) имеются фиксированные точки, соответствующие устойчивым узлам; туда сходятся траектории РГ потоков со всех направлений. Существование устойчивых решений уравнений (4) крайне важно для понимания критических явлений в исследуемых веществах, поскольку таким решениям соответствуют непрерывные фазовые переходы. Однако уже в рамках трёхпетлевого анализа видно, что устойчивая фиксированная точка в плоскости (u, v) с координатами u = 0.1871(10), v =1.4915(10) находится не в том квадранте фазовой плоскости, который, как это было отмечено в разделе I, соответствует фазовым переходам в треугольных полностью фрустрированных джозефсоновских решётках. Численный анализ четырёхпетлевых разложений (4), лишь незначительно сдвигая координаты фиксированной точки, подтверждает это утверждение. Напомним, что устойчивый узел, соответствующий непрерывным фазовым переходам типа сверхпроводник-диэлектрик в джозефсоновских решётках треугольного типа, должен быть локализован в плоскости (u, v) с координатами u > 0 и v < 0. Но этого не происходит. Следовательно, в этой области треугольные полностью фрустрированные джозефсоновские решётки могут демонстрировать только анизотропное скейлинговое поведение и фазовый переход I-го рода.

Аналогичная ситуация наблюдается при численном анализе уравнений (4) в плоскости (u, w). Действительно, фазовому переходу в случае квадратных полностью фрустрированных джозефсоновских решёток на фазовой диаграмме РГ потоков соответствует область u > 0 и w > 0 (первый квадрант). Однако, как показывает численный анализ, устойчивый узел в плоскости (u, w) находится в четвёртом квадранте фазовой плоскости с координатами u = 1.6783(10), w = – 0.7481(10). Следовательно, фазовый переход сверхпроводник-диэлектрик в полностью фрустрированных джозефсоновских решётках с квадратной структурой может быть только переходом I-го рода. Наши качественные предсказания относительно критического поведения рассматриваемых физических систем хорошо согласуются с результатами как более ранних исследований [6, 7], так и с результатами недавних расчётов [11], выполненных в рамках существенно иных теоретических подходов, а также в более высоких РГ приближениях.

Список литературы

[1] Bradley R.M., Doniach S. // Phys. Rev. B. 1984. V. 30. P. 1138.
[2] Granato E., Kosterlitz J.M. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65, P. 1267.
[3] Habard J. // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3, P. 77.
[4] Стратонович Р.Л. // ДАН СССР. 1957. V. 115, P. 1097.
[5] Choi M.Y., Doniach S. // Phys. Rev. B. 1985. V. 31. P. 4516.
[6] Antonenko S.A., Sokolov A.I. // Phys. Rev. B. 1994. V. 49. P. 15901.
[7] Antonenko S.A., Sokolov A.I., Varnashev K.B. // Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 161.
[8] Varnashev K.B. // Preprint. SPbU-IP-00-12.
[9] Baker G.A. Jr., Nickel B.G., Meiron D.I. // Phys. Rev. B. 1978. V. 17. P.1365.
[10] Guida R., Zinn-Justin J. // J. Phys. A. 1998. V. 31. P.8103.
[11] Kompaniets M.V., Kudlis A., Sokolov A.I. // Nucl. Phys. B. 2020. V. 950. P.114874.