

Оптимизация контроля целостности радионавигационного поля на основе полиномов Лагранжа

Г. Д. Пантелеев, С. С. Корженевский, И. В. Степанов, М. А. Галков

Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского

vka@mil.ru

Аннотация. Эффективность работы навигационной аппаратуры зависит как от ее надежности, так и от достоверности выходных измерений. Задача контроля целостности радионавигационного поля решается на основе использования однозначной связи навигационных измерений с геомагнитными направлениями движения потребителя и осуществляется путем сравнения текущих измерений с расчётными, полученными экстраполированием участка траектории, где их считают достоверными.

Ключевые слова: повреждения радионавигационного поля, недостоверные измерения, ошибка интерполяции

I. ВВЕДЕНИЕ

В ходе радионавигационных местоопределений, имеют место повреждения навигационного поля, которые из-за их неразличимости – территориально ограниченных проявлений – не представляется возможным выявить на системном уровне.

Более того, в результате таких воздействий точностные характеристики аппаратуры могут быть искажены незначительно, чтобы быть обнаруженными как аномальные, но при этом достаточны, чтобы объект отклонился от цели и, как результат, целевая задача была бы сорвана.

С учетом вышеуказанного, и в целях обеспечения гарантированного распознавания недопустимых повреждений радионавигационного поля, требуется разработать алгоритм, обладающий достаточной чувствительностью и точностью для решения задачи выявления (обнаружение) факта (момента) повреждений радионавигационного поля и оценки уровня искажений радионавигационных параметров, которые недопустимо влияют на точность местоопределений потребителя, в том числе в его движении.

С целью обеспечения объективного контроля достоверности радионавигационных местоопределений требуется подобрать функцию, наиболее точно описывающую траекторию движения потребителя и позволяющую получить данные, соответствующие реальности, что в нашем случае гарантируется учетом однозначности связи навигационных измерений с геомагнитным направлением движения.

Данная задача успешно решается интерполяцией – расчетом коэффициентов полинома для участка, на котором осуществляется контроль целостности радионавигационного поля, построением на этой основе экстраполирующей функции и разработкой условий экстраполяции.

II. ВЫБОР И ОБОСНОВАНИЕ РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА ОЦЕНКИ ПОВРЕЖДЕНИЙ РАДИОНАВИГАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА

Поскольку, интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ совпадает с контролируемой функцией $y(x)$ в узлах сетки и может не совпадать в промежутках между ними, требуется вычислить величину их расхождений, т.е. найти ошибку интерполяции.

Будем считать, что $y(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ и дифференцируема на нём $n + 1$ раз.

Тогда, $R_n(x) = y(x) - L_n(x)$ – ошибка интерполяции.

Введем корневой полином: $\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$.

Производная от него:

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) \Rightarrow \omega'(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k).$$

Тогда можно записать $L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x)}$.

Замечание 1. *Равномерной* (чебышевской или ∞ -нормой) *нормой* функции ω_n называют величину, определяемую как $\|\omega_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|$ [1]. Тогда:

- для случая $n = 1$. $\|\omega_1\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\omega_1(x)| = \frac{(b-a)^2}{4}$;
- для случая $n = 2$. $\|\omega_2\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\omega_2(x)| = \frac{(b-a)^3}{12\sqrt{3}}$;
- для случая $n = 3$. $\|\omega_3\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\omega_3(x)| = \frac{(b-a)^4}{81}$;
- для полинома ω_n с равноотстоящими корнями на интервале $[a, b]$ можно получить следующую оценку:

$$\|\omega_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1} n!}{4n^{n+1}} \text{ при } n \geq 3.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(x) = y(x) - L_n(x) - k\omega(x)$, где k – некоторая константа для $\psi(x_i) = 0, i = 0, \dots, n$.

Подберем k так, чтобы $\psi(x) = 0$ в точке, для которой производится оценка: $k = \frac{y(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$.

Учитывая, что в найденной точке $L^{(n+1)}(x) = 0$, $\psi^{(n+1)}(x) = 0$, получаем:

$$\psi^{(n+1)}(x) = y^{(n+1)}(x) - 0 - k(n+1)! = 0 \text{ при } x \in [a, b], \text{ и}$$

$$k = \frac{y^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

Тогда, ошибка интерполяции:

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \omega(x) \text{ при } x \in [a, b].$$

III. РАЗРАБОТКА УСЛОВИЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

С целью обеспечения контроля *достоверности* навигационных определений требуется подобрать функцию, наиболее точно описывающую траекторию движения потребителя, т. е. получить *опорные*, соответствующие реальности данные, что, в нашем случае, основано на однозначности связи навигационных измерений с *геомагнитным направлением* движения потребителя.

Ведем ограничения к решению указанной задачи. Маршрут движения потребителя должен быть задан в геоцентрической, неподвижной системе координат, со следующими ориентирами: точкой входа на маршрут $a(x_a, y_a, z_a)$, конечной точкой маршрута $b(x_b, y_b, z_b)$. Кроме того, возможно назначение любого числа промежуточных точек, например, $b1(x_{b1}, y_{b1}, z_{b1})$, $b2(x_{b2}, y_{b2}, z_{b2})$ и т. д.

Далее, на основе расчета коэффициентов интерполяционного полинома для функции $y(x)$, определённых на интервале $[a, b]$, разрабатывается экстраполирующая функция.

При этом, следует предусмотреть процедуру принятия решения о выборе *существенной* ординаты для каждого участка (шага) экстраполяции.

Важно знать, что за счет экстраполяции, результаты которой распространяются не только, на *опорные направления*, но и на *контролируемую функцию*, будет зависеть качество принимаемых решений об их *близости*.

При этом, указанная процедура должна быть дополнена контролем целостности системы, позволяющим обнаружить факт (момент) несанкционированного воздействия на ее точностные характеристики.

IV. СИНТЕЗ ЭКСТРАПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

С учетом массива *геомагнитных направлений* $M_0 = \left\{ R_j(t_j) \right\}_{j \in m_0}$, $j = 0, \dots, n-1$, привязанных к шагам экстраполяции, формируются *опорные направления* движения потребителя, которые, как было заявлено выше, из-за их однозначности будем считать *достоверными*.

Теперь положим, что $t_j = j \cdot \tau$, где $\tau = (b-a)/n$ – временные интервалы, соразмерные шагам экстраполяции.

Остаточный член, в этом случае, оценивается:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)$$

С учетом приведенных выше рассуждений и в соответствии с введенными ранее ограничениями, найдем оценку ошибки интерполяции в пределах первого шага экстраполяции, т. е. при $n = 1$:

$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a,b]} |y''(x)|, \text{ для любых } x \in [a, b].$$

Замечание 2. При большем числе узлов сетки полинома последовательность расчета ошибки интерполяции не меняется.

Поэтому оценки ошибок интерполяции рассчитываются следующим образом:

$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a+\tau, b]} |y''(x)|, \text{ для } \forall x \in [a+\tau, b];$$

$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a+2\tau, b]} |y''(x)|, \text{ для } \forall x \in [a+2\tau, b];$$

$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a+3\tau, b]} |y''(x)|, \text{ для } \forall x \in [a+3\tau, b];$$

и т. д. до достижения конечной точки маршрута, т. е. для всех $x \in [a+n\tau, b]$.

Сопоставляя результаты расчета оценок ошибок интерполяции с *опорными значениями*, фиксируя при этом степень их возрастания либо неизменности, можно выявить интервалы, на которых ошибки интерполяции превышают предельные значения и, тем самым, обнаружить измерения, непригодные к местоопределению.

V. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОШИБОК ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Очевидно, что при выборе решающего правила отбраковки получаемых оценок необходимо, с одной стороны, уменьшать вероятность вовлечения в обработку аномальных измерений, а с другой стороны – сохранять достоверную информацию.

Названную задачу успешно решает широко используемый байесовский критерий минимального среднего риска [2], при котором достоверность результата измерения соответствует *границам технологического рассеивания* в нормальном режиме и определяется при статистической обработке измерительной информации. Оптимизацию контроля достоверности иллюстрирует рис. 1.

Поскольку интеграл от плотности распределения не имеет точного представления через элементарные функции, функция распределения выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$, значения которой можно найти из таблиц.

Доверительной вероятностью (достоверностью) измерения называют вероятность того, что истинное значение измеряемой величины попадает в границы *доверительного интервала*, т.е. в зону $c \leq x \leq d$ и определяется в долях единицы или в процентах:

$$P_D = P[c \leq x \leq d] = 0,5 \left[\Phi \left(\frac{c - \bar{x}}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{d - \bar{x}}{\sigma} \right) \right],$$

где \bar{x} – среднее выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) .

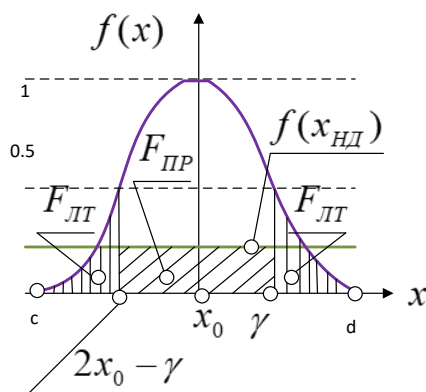


Рис. 1. Вероятности ошибок и границ принятия решения по критерию Байеса при гауссовом распределении контролируемой переменной

Для стандартного нормального закона распределения аргументом этой функции является гарантийный коэффициент t :

$$t = \frac{\mu}{\bar{\sigma}_0}, \text{ где } \mu = (d - \bar{x}), \mu = -(c - \bar{x}), \bar{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2.$$

В случае симметрии $|c| = |d|$. Тогда $\mu = \sigma \arg \Phi(P_D) = t \sigma^*$, где σ^* – *среднеквадратическое отклонение* данной выборки, а μ – *искомый доверительный интервал* той же выборки.

Имея доверительную вероятность P_D (часто ее принимают равной 0,9), используя табулированную интегральную функцию Лапласа, определяют *гарантийный коэффициент* t и вычисляют границы *доверительного интервала*, или, что тоже самое, *достоверность текущих навигационных местоопределений*.

VI. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ СОСТОЯНИЯ РАДИОНАВИГАЦИОННОГО ПОЛЯ ПО ВЫЯВЛЕНИЮ НЕДОСТОВЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для оценки вклада, предложенного подхода, в эффективность системы контроля состояния радионавигационного поля проведено имитационное моделирование процесса навигационных местоопределений, в условиях повреждений радионавигационного поля разной интенсивности, вплоть до предельной.

Пример генерации в среде MATLAB случайной выборки из 100 измерений при базовом для навигационной аппаратуры потребителя среднеквадратическом отклонении в 5 метров [3] и типовой для технических средств достоверности результатов измерений 0,9 представлен на рис. 2.

Таким образом, проблема контроля состояния радионавигационного поля, с целью выявления *недостоверных измерений*, сведена к нахождению экстремума определенного функционала и построению доверительных интервалов заданного размера [4].

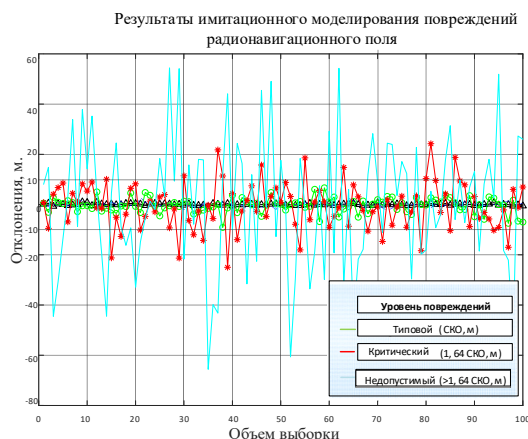


Рис. 2. Результаты генерации случайной выборки измерений

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена и обоснована возможность использования полиномов Лагранжа для оптимизации контроля достоверности навигационных местоопределений. В рамках статьи приведен расчёт ошибок местоопределений, основанный на совмещении процедур интерполяции с экстраполяцией на интервалах нужного размера. Полученные оценки достоверности могут быть использованы для повышения эффективности иных радиотехнических систем, так например, связи и радиолокации [4].

Также рассмотрена возможность использования критерия Байеса для оптимизации контроля состояния радионавигационного поля при обосновании границ принятия статистических решений.

Представлены результаты моделирования влияний на решаемую технологическую задачу мешающих воздействий различной интенсивности, выполненного в интересах получения оценок достоверности. Кроме того, результаты моделирования показывают, что предложенное сопровождение навигационных измерений позволяет снизить на 15...20 % непредсказуемость в уровне достоверности и способствует повышению эффективности систем контроля состояния радионавигационного поля, тем самым повышая точность измерений в тех же пределах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р.К. Бельхеева, С.П. Шарый. Вычислительные методы в примерах: учебное пособие. Новосибирск, ИПЦ НГУ. 2022. 90 с.
- [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Корольков, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
- [3] Подход к оптимизации контроля достоверности радиолокационных измерений на основе интервальной оценки с помощью доверительной вероятности / Г.Д. Пантелеев, С.С. Корженевский, Н.А. Куприянов // Вестник ПГТУ. Сер. Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2024. № 3(63). С. 6-14.
- [4] Метод косвенного контроля мощности сигналов глобальных навигационных спутниковых систем / И.В. Сахно, А.В. Назаров, Е.В. Коннов [и др.] // Метеорологический вестник. 2016. Т. 8, № 3. С. 39-61. EDN XDZHRJ.