Анализ разрешения по углу в разреженной антенной решетке

В. Ю. Волков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

vl_volk@mail.ru

Г. А. Бабанин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

babaningleb@mail.ru

Аннотация. **Рассмотрено влияние разрежения элементов линейной антенной решетки на разрешающую способность по углу при использовании алгоритмов MUSIC и MVDR. Исследована потенциальная возможность сверхразрешения путем анализа свойств ко-решетки. Проведено моделирование нескольких разреженных структур и определен их выигрыш по сравнению с однородной решеткой.**

Ключевые слова: разрешающая способность; алгоритмы сверхразрешения; MUSIC; MVDR; минимальная избыточность; ко-решетка; псевдоспектр

I. Введение

Разрешающая способность по углу классических методов определяется линейным размером апертуры или количеством активных элементов в антенной решетке (АР), причем дальнейшее увеличение апертуры приводит к незначительному приросту разрешающей способности. В практике разработчику приходится выбирать между размерами АР и возможным разрешением. Таким образом, обычно задача сводится либо к размещению конечного числа излучателей на поверхности неограниченных размеров, либо к размещению неограниченного числа излучателей на поверхности фиксированных размеров.

Классические методы пеленгации заключаются в когерентном накоплении сигналов со всех элементов и позволяют получить максимальное отношение сигнал/шум [1], однако их разрешающая способность по критерию Рэлея ограничена шириной диаграммы направленности (ДН) θ_{min}. Для линейной апертуры L рэлеевский предел в радианах $\theta_{min} \sim \lambda / L$, где λ – длина волны излучения. Для линейной однородной решетки с числом элементов M и межэлементным расстоянием $d = \lambda/2$ имеем $\theta_{min} \sim 2/M$, что часто не удовлетворяет современным требованиям к бортовым радиолокаторам.

В связи с этим развитие получили алгоритмы сверхразрешения, такие как MVDR [2], MUSIC [3], ESPRIT [4] и их вариации [5–6].

Ввиду ограничения на количество используемых излучателей особое внимание получили разреженные (sparse) (в линейном варианте неоднородные или неэквидистантные) антенные решетки [7–9].

II. Теория разреженных решеток и постановка задачи

Рассмотрим линейную решетку с числом всенаправленных элементов M и их расположением на позициях $\{x_m\}$, $m = 0, \ldots, M–1$. Обычно позиции располагаются с некоторым шагом сетки d, который выбирается равным или меньшим половины длины волны λ принимаемого излучения. В таких случаях набор позиций представляется числами $\{k_m\}$, так что $x_m = k_m d$. Числа $\{k_m\}$ могут быть как целыми, так и дробными.

Для набора M антенных элементов общее число пар равно $M(M–1)/2$. Если все разности позиций различны, решетка не имеет избыточности (non-Redundant) [10] и ее относительная апертура равна $A/d = M(M–1)/2$.

Минимальная избыточность заключается в отсутствии повторяющихся лагов (разностей позиций) в так называемой ко-решетке (co-array) C [11, 12]. Для линейной решетки, состоящей из M элементов с весами $\{w_m\}$, которые равны нулю или единице, элементы ко-решетки равны

$$C_k = \sum_{m=0}^{N_k} w_m w_{m+|k|}\,,\quad N_k = M - |k| - 1\,,$$

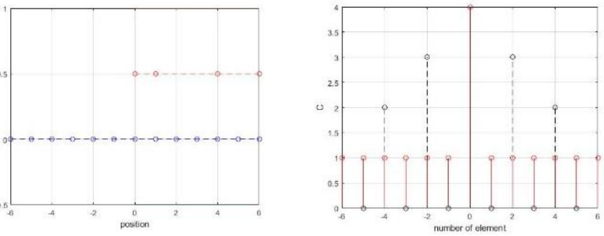
где число k называется лагом.

Для *идеальной* решетки (perfect) в ко-решетке представлены все лаги, причем только один раз. Если какой-нибудь лаг встречается более одного раза, решетка содержит избыточность (redundancy), если же какой-нибудь лаг отсутствует (gap), решетка имеет дырку (hole) в этом месте.

Пусть $M = 4$, тогда вариант АР с минимальной избыточностью (MRA – minimum redundancy array) [3] представлен набором целочисленных позиций {0,1,4,6}, которые представлены на рис. 1*а* сверху. При этом апертура антенны составляет $A = 6d$.

Подставляя в формулу вектор коэффициентов W = [1 1 0 0 1 0 1], получаем распределение лагов разреженной решетки, представленное на рис. 1*б*. Как видно, разные ненулевые лаги ко-решетки встречаются только один раз, причем отсутствуют пропуски лагов (holes). Если четыре элемента расставить с одинаковыми расстояниями (для той же апертуры расстояния будут равны $2d$), то ненулевые лаги ко-решетки для однородной АР будут иметь кратность, что и говорит об избыточности. На рис. 1*б* они показаны пунктиром.

Число различных элементов (число степеней свободы) в ко-решетке целиком определяется геометрией решетки. Для однородной линейной решетки (ULA) это число равно $2M–1$ (в данном примере ULA для $M = 4$ – это семь), тогда как для разреженных решеток оно может быть существенно большим, порядка $O(M^2)$. Наличие различных лагов дает возможность представить виртуальную решетку, причем в идеальном случае она не будет содержать повторяющихся или пропущенных элементов, т. е. окажется однородной.



а *б*

Рис. 1. MRA решетка, $M = 4$: *а* – позиции {0 1 4 6} разреженной решетки и ее виртуальная решетка; *б* – лаги ко-решетки разреженной решетки и однородной решетки с тем же числом элементов

Такая виртуальная решетка для MRA с $M = 4$ изображена на рис. 1*а* снизу от позиций самой разреженной решетки. Как видно, виртуальная решетка содержит M_V = 13 элементов, что существенно больше физических четырех. Таким образом, число степеней свободы разреженной решетки больше, чем у однородной. Этот факт является привлекательным и обещающим получение существенного выигрыша в точности и разрешающей способности АР без увеличения апертуры и числа элементов.

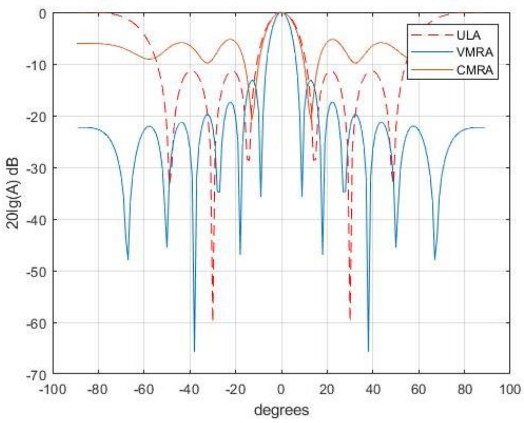
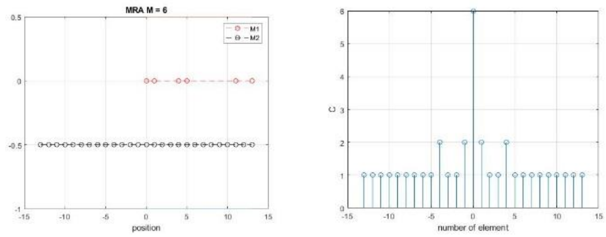


Рис. 2. Амплитудные диаграммы направленности разреженной MRA решетки: ULA – однородная АР с межэлементными расстояниями λ; VMRA – виртуальная решетка; CMRA – MRA АР с обычным формированием ДН

На рис. 2 изображены амплитудные диаграммы направленности (ДН) для разреженной MRA, рассчитанные при различных предположениях. Если предположить взвешивание с постоянными коэффициентами и суммирование, то ДН разреженной решетки (CMRA) оказывается гораздо хуже той, которую можно получить в случае однородной решетки (ULA – штриховая линия) с той же апертурой и таким же числом элементов. Однако если бы оказалось возможным использовать виртуальную решетка, то при том же числе физических элементов ее ДН (VMRA) была бы существенно лучше двух предыдущих.

В рассматриваемом примере ULA обеспечивает рэлеевский предел углового разрешения $\theta_{min} \sim \lambda/L \approx 28°$, а виртуальная решетка позволила бы уменьшить его вдвое, что не кажется большим достижением. Однако уже для $M = 6$ выигрыш может быть значительнее.



а *б*

Рис. 3. MRA решетка, $M = 6$: *а* – позиции {0,1,4,5,11,13} разреженной решетки и ее виртуальная решетка; *б* – лаги ко-решетки разреженной решетки

На рис. 3*а* представлена неоднородная MRA решетка с расположением элементов {0,1,4,5,11,13}. Ее апертура равна $L = 13d$, виртуальная решетка содержит M_V = 27 элементов и изображена на рис. 3*б*. Решетка содержит избыточность, поскольку имеются кратные лаги в ко-решетке (рис. 3*б*), однако эта избыточность минимальная по отношению к другим вариантам разрежения при том же числе элементов.

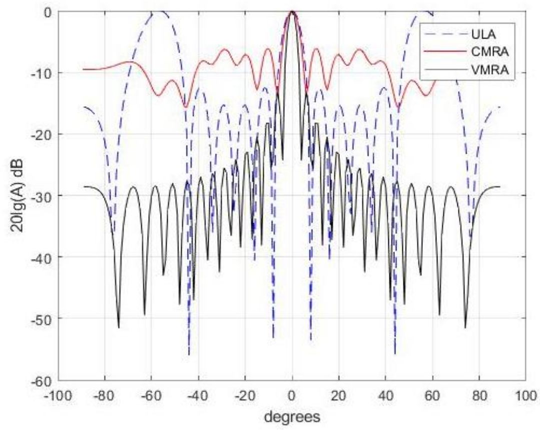


Рис. 4. Амплитудные диаграммы направленности разреженной MRA решетки: ULA – однородная АР с межэлементными расстояниями λ; VMRA – виртуальная решетка; CMRA – MRA АР с обычным формированием ДН

Амплитудные ДН представлены на рис. 4 для трех АР. Однородная ULA решетка с 6 элементами, расположенными через 2,17λ может обеспечить разрешение $\theta_{min} \approx 26°$. Виртуальная решетка VMRA с 27 элементами при шести физических элементах могла бы обеспечить $\theta_{min} \approx 4{,}4°$. Однако реализовать алгоритмы сверхразрешения с помощью линейного взвешивания не удается. Обычное суммирование приводит к ухудшению ДН по сравнению с однородной решеткой (рис. 4, CMRA). Основным способом получения оценок направлений и разрешения по углу становится формирование выборочной корреляционной матрицы с последующей нелинейной обработкой наблюдаемого массива данных.

В работе проводится анализ возможностей разрешения нескольких источников излучения при использовании известных алгоритмов получения оценок направлений для выбранной структуры разреженной АР. Исследуются два алгоритма получения псевдоспектров: алгоритм MUSIC (Multiple Signal Classification) [8, 13] и алгоритм Кэйпона MVDR (Minimum Variance

Distortionless Response) [13]. Сравнение этих алгоритмов в целях сверхразрешения представлено в работе [14], но только для однородных решеток.

III. Алгоритм MUSIC

Рассмотрим разреженную линейную антенную решетку (АР), которая включает M изотропных приемных элементов, расположенных на позициях $\{x_m\}$. Пусть АР принимает сигналы $s_j(t)$ от J некоррелированных источников излучения, расположенных под различными углами $\{\theta_j\}$, $j = 1, \ldots, J$ к нормали решетки в дальней зоне. Считаем, что принятые каждым элементом узкополосные сигналы фильтруются, дискретизируются и преобразуются по Фурье, так что в дальнейшей обработке участвуют узкополосные сигналы, соответствующие одному частотному диапазону этого дискретного отсчета (snapshot), содержащего соответствующие компоненты сигнала за k-й интервал времени, $k = 1, \ldots, K$.

Модель принимаемого сигнала в k-м интервале времени представляется в виде вектора размерности Mx1

$$Y = \alpha S + N,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_J)^H$ – матрица комплексных амплитуд; N – вектор некоррелированных шумов. Здесь матрица S размером MxJ состоит из элементов $\{s_{m,j}\}$, соответствующих j-ой плоской волне, принимаемой m-м приемным элементом. Каждый ее M-мерный столбец $s(\theta_j)$ есть направляющий вектор АР (steering vector) для соответствующего направления [8, 13].

Корреляционная матрица принимаемых сигналов $R = \mathrm{M}\{YY^H\}$ размера MxM

$$R = R_s + R_n = SPS^H + p_0 I,$$

которая полагается эрмитовой. Квадратная матрица P = diag($\{p_j\}$) является диагональной и включает мощности каждого из сигналов $p_j = M\left\{\left|\alpha_j\right|^2\right\}$, а p_0 есть мощность шума в каждом канале.

Если число приходящих сигналов J меньше числа элементов решетки, то сигнальная часть корреляционной матрицы $R_s = SPS^H$ имеет ранг J. Следовательно, она имеет M–J собственных векторов, соответствующих нулевым собственным значениям. Для каждого из таких векторов q_m размерности M–J получаем $R_s q_m = 0$, откуда $S^H q_m = 0$. Обозначим Q_n матрицу Mx(M-J) этих собственных векторов.

Оценка корреляционной матрицы R запишется в виде [8, 13]

$$\hat{R} = (1/K)\sum_{k=1}^{K} Y_k Y_k^* . \qquad (1)$$

Статистика (1) подвергается сингулярному разложению $Q[\Lambda + p_0 I]Q^H$, из которого выделяется матрица Q_n. соответствующая шумовому подпространству. Конечный результат, представляющий собой псевдоспектр, записывается следующим образом [8, 13]:

$$P_{MUSIC}(\theta) = 1/\left(\sum_{m=J+1}^{M}\left|Q_n^H s(\theta_j)\right|^2\right). \qquad (2)$$

Слабым местом алгоритма является необходимость задания числа J принимаемых излучений. Если это число неизвестно, то возникает задача оценивания значения J. Влияние качества оценки неизвестного числа сигналов на точность и разрешающую способность исследовано слабо. Если число сигналов J превышает число элементов решетки M, возникает проблема неоднозначности оценок, которая для частного случая линейной разреженной решетки с четырьмя элементами исследовалась в работе [8].

IV. Алгоритм MVDR (Capon)

Исходным выражением является взвешенное суммирование входных сигналов Y

$$z = \sum_{m=1}^{M} w_m^* y_m = W^H Y .$$

Для формирования вектора весовых коэффициентов вводится следящий (steering) вектор [13]

$$A(\theta) = (a_1, a_2, \ldots, a_M)^H ,$$

с компонентами $a_m = \exp(-j\varphi_m))$, настроенными на некоторое направление θ прихода излучения. Здесь $\varphi_m = k d_m \sin\theta$, $k = 2\pi/\lambda$, $d_m = x_m - x_{m-1}$ – разность позиций антенных элементов.

Тогда матрица наблюдений Y содержит сигнальную часть $A(\theta)^H s(\theta)$ для направления θ. В случае прихода сигнала с этого направления требуется минимизировать мощность помеховой составляющей путем выбора соответствующих коэффициентов фильтра.

Критерием оптимизации весовых коэффициентов является минимум мощности выходного сигнала фильтра $P = \mathrm{M}\{|z|^2\} = W^H R W$ при ограничении $W^H A(\theta) = 1$. Решением является вектор весовых коэффициентов [13] $W = R^{-1}A / R^{-1}A^H A$. Выходная мощность как функция от углового направления принимает вид

$$P_{CAPON}(\theta) = 1/A(\theta)^H R^{-1} A(\theta). \qquad (3)$$

При подстановке вместо матрицы R ее оценки (1) выходная мощность образует угловой спектр, пики которого являются оценками направлений прихода излучения. Впервые этот метод описан в [2] для оценивания частотного спектра.

V. Моделирование алгоритмов

Истинные углы двух источников представлены вертикальными черными линиями на рис. 5. Для сравнения использовались алгоритмы MVDR и MUSIC, рассчитанные для M = 10 эквидистантных элементов, и для разреженной структурой вида [0 1 4 7 9]d с пятью элементами. При этом интервал d = λ/2 был выбран одинаковым, и апертуры всех решеток совпадали.

Представленные результаты показывают лучшие результаты для разреженной структуры, которая оказалась единственной системой из рассмотренных, разрешающей два источника сигнала при угловом разнесении между ними $\Delta\theta = 1{,}4^{\circ}$.

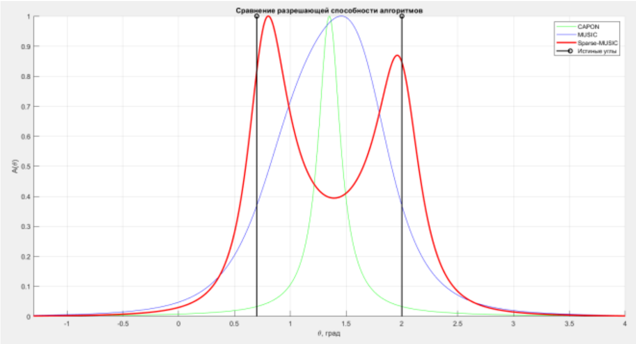


Рис. 5. Пример сравнения разрешающей способности Capon (зеленая), MUSIC (синяя) и sparse-MUSIC (красная линии), полученные при истинных углах 0,6 и 2 градуса соответственно, ОСШ = 20 дБ, M = 10, M_{sparse} = 5

Моделированием построена зависимость разрешающей способности (минимального углового расстояния $\Delta\theta$ между двумя источниками излучения для рассматриваемых алгоритмов сверхразрешения при различных отношениях сигнал-шум (ОСШ) (рис. 6). Использовалось N_{r} = 200 итераций для оценивания пороговой вероятности правильного разрешения P_{r} = 0,5.

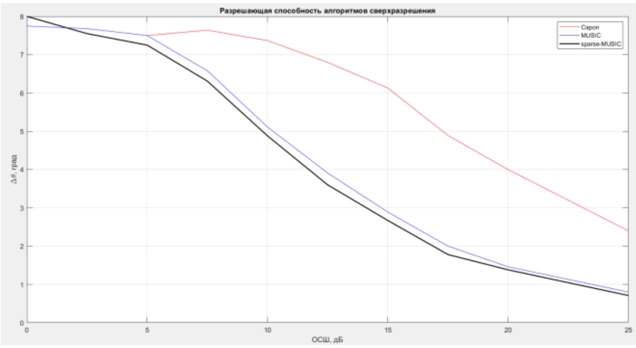


Рис. 6. Сравнение разрешающей способности MVDR-Capon (красная линия), ULA-MUSIC (синяя линия) и SPARSE-MUSIC (черная линии) для двух источников, Nr = 200, M = 10, M_{sparse} = 5

Алгоритмы MDVR-Capon и ULA-MUSIC моделировались для однородной решетки из 10 элементов. Разреженная структура SPARSE-MUSIC состояла из пяти элементов при той же апертуре антенны, и показала несколько лучшие результаты углового разрешения.

Заключение

Применение разреженных линейных решеток в задаче разрешения источников излучения по угловой координате представляется перспективным. Реализация преимуществ разреженных структур возможно при нелинейной обработке, основанной на формировании выборочной корреляционной матрицы, как это происходит в алгоритмах сверхразрешения MUSIC и MDVR. При заданной апертуре разрежение позволяет уменьшить число антенных элементов и сохранить или улучшить разрешающую способность при некоторых потерях в отношении сигнал/шум.

Список литературы

[1] Обработка сигналов в радиотехнических системах: Учеб. пособие / Далматов А.Д., Елисеев А.А., Лукошкин А.П., Оводенко А.А., Устинов Б.В.; Под ред. А.П. Лукошкина. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. 400 с.

[2] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis // Proc. IEEE. 1969. V. 57, August. P. 1408-1418.

[3] Krim H., Viberg M. Two Decades of Array Signal Processing Research: The Parametric Approach // IEEE Signal Processing Magazine. 1996. V. 13 (4), July. P. 67-94.

[4] Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. V. 37 (7), July. P. 984-995.

[5] Pesavento M., Gershman A.B., Haard M. Unitary Root-MUSIC with a Real-Valued Eigendecomposition: A Theoretical and Experimental Performance Study // IEEE Trans. on Signal Processing. 2000. V. 48 (5), May.

[6] Синтез алгоритма C-SPRIT для решения задачи сверхразрешения / Г.А. Бабанин, А.Я. Авраменко, Т.И. Тагаев, И.Д. Антонов // XXVII международная научная конференция Волновая электроника и инфокоммуникационные системы, Санкт-Петербург, 03-07 июня 2024 г. С. 26-30.

[7] Van Trees H.L. Optimum array processing. Part IV. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Wiley, 2002.

[8] Abramovich Y.I., Spencer N.K., Gorokhov A. DOA estimation for noninteger linear antenna arrays with more uncorrelated sources than sensors // IEEE Trans. on Signal Processing. 2000. V. 48 (4), May. P. 943-955.

[9] Schmidt R. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 1986. V. 34 (3), March. P. 276-280.

[10] Linebarger D.A., Sudborough I.H., Tollis I.G. Difference bases and sparse sensor arrays // IEEE Trans. Inf. Theory. 1993. V. 39, Mar. P. 716–721.

[11] Moffet A.T. Minimum redundancy linear arrays // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1968. V. AP-16, Mar. P. 172–175.

[12] Hoctor R.T., Kassam S.A. The unifying role of the coarray in aperture synthesis for coherent and incoherent imaging // Proc. IEEE. 1990. V. 78, Apr. P. 735–752.

[13] Bhupenmewada, Niwaraia K., Jain M. Performance analysis of MUSIC and MVDR DOA estimation algorithm // Int. J. of Engineering and Management Research. 2018. V. 8(2), April, P. 2394-6962.

[14] Манохин Г.О., Гельцер А.А., Рогожников Е.В. Увеличение разрешающей способности радиолокационной системы за счёт параметрических методов обработки сигналов // Вестник СибГУТИ. 2015. №1. С. 15-23.