

Критерии возникновения эффекта стохастического резонанса

А. С. Табакова

Омский государственный технический университет (ОмГТУ)

nasya.tabakova@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено возникновение эффекта стохастического резонанса в системе, включающей в себя цифровой фильтр на основе характеристической функции Ляпунова и пороговое устройство. Результаты исследований показывают нелинейный характер изменения отношения сигнал/шум на выходе системы при увеличении интенсивности шума на входе. Данное изменение в статье описано полиномиальными зависимостями. Найдены критерии граничных значений интенсивности шума, при которых в системе возникает явление стохастического резонанса.

Ключевые слова: стохастический резонанс; характеристическая функция Ляпунова; нелинейная система

I. ВВЕДЕНИЕ

По мнению известных ученых, таких как Б.Р. Левин, В.И. Тихонов, С.И. Баскаков, И.С. Гоноровский, мешающие воздействия ухудшают функционирование различных физических и, особенно, технических систем. В частности, наличие шумов затрудняет обнаружение сигнала, снижает качество связи, разрушает передаваемую диагностическую информацию и т. д. В некоторых системах может возникать явление стохастического резонанса (СР), при котором добавление шума усиливает полезный сигнал, и, следовательно, облегчает его обработку. Иными словами, в таких системах воздействие шума становится конструктивным и в присутствии шума система начинает работать лучше, чем в его отсутствии. Наличие шума, например, будет способствовать усилению полезного входного сигнала в составе аддитивной смеси, который является слабым. Эффект СР формируется при добавлении шума определенной интенсивности [1]. С увеличением интенсивности шума до определенного значения эффект стохастического резонанса возникает и присутствует, пока интенсивность шума не достигнет критического значения. При дальнейшем увеличении интенсивности шума эффект СР пропадает. В результате эффекту СР соответствуют некоторые оптимальные значения уровня шума. В условиях СР выходной сигнал системы будет изменяться по закону полезного сигнала. При этом энергия шума переходит в энергию сигнала [1].

Появление эффекта СР может быть спрогнозировано в различных классах устройств и систем. Система, работающая в режиме СР, имеет три важных признака:

- нелинейность;
- наличие двух временных масштабов;
- наличие стабильных состояний (система может быть динамической бистабильной или моностабильной, а также нединамической пороговой [1]).

Явление стохастического резонанса характеризуется рядом показателей и специальными формами зависимостей параметров системы от интенсивности шума на ее входе [2–4].

II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

А. Постановка задачи

Пусть аддитивная смесь регулярного и шумового воздействий представлена суммой

$$z(k\Delta t) = u(k\Delta t) + n(k\Delta t), \quad (1)$$

где $z(k\Delta t)$ – k -ое дискретное мгновенное значение аддитивной смеси полезного сигнала и шума, взятое в момент времени $t = t_0 + k\Delta t$ при $t_0 = 0$; Δt – интервал дискретизации; $u(k\Delta t)$ – полезный (регулярный) сигнал. Функция $u(k\Delta t)$ представляет собой квазидетерминированный сигнал и определяется выражением

$$u(k \cdot \Delta t) = e_0 + U_0 \sin \left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k + \eta \right) \quad (2)$$

где e_0 – математическое ожидание сигнала; U_0 , ω_0 – амплитуда и круговая частота сигнала (постоянные величины); η – начальный угол сдвига фазы сигнала (случайная величина с равномерным законом распределения на интервале $-\pi \dots +\pi$); f_0 – частота сигнала; $f_d = 1/\Delta t$ – частота дискретизации. В выражении (1) $n(k\Delta t)$ – «белый» шум, который характеризуется интенсивностью (энергией) $\sigma_{ш}^2 \equiv (\sigma_{ш}^2)_{вх}$.

Смесь (1) подается на вход нелинейной системы, состоящей из цифрового фильтра на основе характеристической функции Ляпунова и порогового устройства. Нелинейная система преобразует входное воздействие (1) и формирует выходной сигнал.

Целью данной работы является определение критериев возникновения эффекта СР в нелинейной системе. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Построить имитационную модель нелинейной системы.
2. Провести испытания модели, построить графики зависимости отношения по мощности сигнал/шум на выходе системы от интенсивности шума на входе.
3. Аппроксимировать построенные зависимости с использованием степенных полиномов.
4. На основе выполненной аппроксимации сформулировать критерии возникновения эффекта СР.

В. Теория

Главным признаком устройств, в которых возникает явление стохастического резонанса, является их нелинейность. В частности, нелинейным является устройство, реализующее алгоритм вычисления значений характеристической функции (х.ф.) А. Ляпунова [5, 6]. Данная функция является вероятностной характеристикой случайного процесса, либо случайной величины [5, 7], и в настоящее время используется для решения различных фундаментальных и прикладных задач. Мнимая часть х.ф. вычисляется в соответствии со следующим выражением

$$\hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sin[z((k-l) \cdot \Delta t) \cdot V], \quad (3)$$

где $\hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t)$ – оценка мнимой части х.ф.; V – параметр х.ф.; l – целое число; N – количество отсчетов сигнала, используемое для вычисления оценки мнимой части х.ф.

Алгоритм (3) позволяет находить оценки х.ф. смеси $z(k \cdot \Delta t)$.

Для алгоритма (3) переходы между состояниями можно связать с установлением на его выходе значений $\hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) > \Pi$ либо $\hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) < -\Pi$. Рассмотрим превышения порога Π , т. е. случай, когда $\hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) > \Pi$, и будем их фиксировать с помощью порогового устройства, работающего в соответствии с выражением

$$c(k \cdot \Delta t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) > \Pi; \\ 0, & \text{если } \hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) \leq \Pi. \end{cases} \quad (4)$$

На рис. 1а показана форма сигнала на выходе устройства с алгоритмом (3) при воздействии смеси (1) с параметрами $U_0=0,6$, $f_0/f_d=0,001$, $\sigma_{\text{ш}}=0,707$. Сигнал на выходе устройства, детектирующего пересечение порога $\Pi=0,8$, показан на рис. 1б. Входной регулярный сигнал показан на рис. 1в.

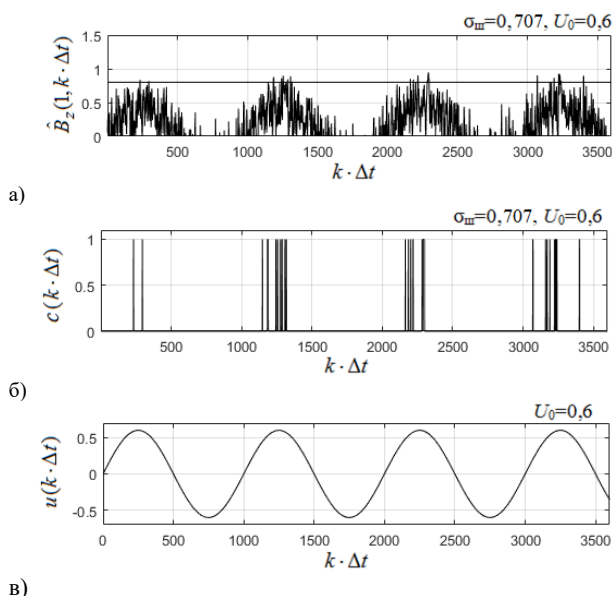


Рис. 1. Разные формы сигналов: а – выходной сигнал устройства (3), б – выходной сигнал порогового устройства (4), в – регулярный входной сигнал (2)

В условиях отсутствия шума выходной сигнал фильтра с использованием характеристической функции Ляпунова не превышает порог системы.

Синтезируем структурную схему системы, включающей в себя цифровой фильтр на основе характеристической функции Ляпунова (3) и пороговое устройство (4) (рис. 2).

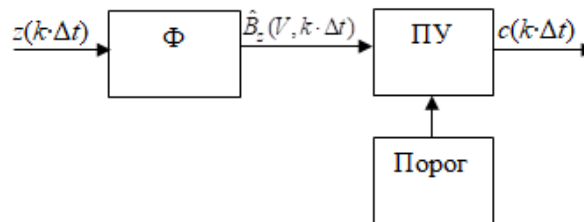


Рис. 2. Структурная схема устройства для повышения соотношения сигнал/шум

Здесь Φ – устройство, реализующее алгоритм (3), ПУ – пороговое устройство. В блоке «Порог» задаётся некоторый уровень Π , при установлении на входе блока ПУ значения $\hat{B}_z(V, k \cdot \Delta t) > \Pi$, формируется сигнал $c(k \cdot \Delta t)$.

Для определения показателей наличия стохастического резонанса будем применять следующие обозначения:

- $h_{\text{вх}}^2 = (\sigma_c^2)_{\text{вх}} / (\sigma_{\text{ш}}^2)_{\text{вх}}$ – отношение по мощности сигнал/шум на входе системы;
- $h_{\text{вых}}^2 = P_{\text{лрег}} / P_{\text{ш}}$ – отношение по мощности сигнал/шум на выходе системы;
- $(\sigma_c^2)_{\text{вх}} = [U_0^2/2] + e_0^2$ – энергия нецентрированного сигнала (2);
- $P_{\text{лрег}}$ – амплитуда спектральной плотности мощности на частоте полезного сигнала;
- $P_{\text{ш}}$ – «шумовое основание» [1].

В работе полезный сигнал и шум считаем изменяющимися во времени напряжениями. Таким образом, единица измерения аддитивной смеси, а также всех сигналов, входящих в аддитивную смесь – вольт [В]. Дисперсия полезного сигнала и измеряется в вольтах в квадрате $[В^2]$, среднеквадратическое отклонение сигнала измеряется в вольтах. Дисперсия сигнала определяет среднюю мощность сигнала, выделяемую на сопротивлении 1 Ом. Также в данной работе единицей измерения частоты сигнала – герц [Гц].

Т.к. средняя мощность, выделяемая на сопротивлении 1 Ом, определяется дисперсией сигнала, для оценки спектральной плотности мощности сигнала будем использовать единицы измерения $[В^2/Гц]$.

С. Результаты экспериментов

На основе структурной схемы, показанной на рис. 2, была построена имитационная модель нелинейной системы в пакете Matlab. На вход системы поступали отсчеты аддитивной смеси (1). Исследования проводились с различными амплитудами полезного воздействия и интенсивностями шума при $V=1$ и $\Pi=0,8$. В ходе эксперимента были рассчитаны значения соотношения сигнал/шум на выходе устройства. Значения $P_{\text{лрег}}$ и $P_{\text{ш}}$ определялись по графику оценки спектральной плотности мощности выходного сигнала

[1]. После завершения испытаний имитационной модели были построены графики зависимостей $h_{\text{вых}}^2 = F((\sigma_{\text{ш}}^2)_{\text{вх}})$, где F – некоторый нелинейный функционал.

По данным результатов экспериментов была проведена аппроксимация полученных зависимостей полиномами 5-го порядка. Пример графика, построенного по результатам испытаний имитационной модели, показан на рис. 3.

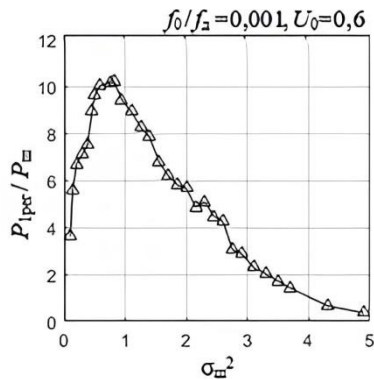


Рис. 3. Пример зависимости соотношения $P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}$ от $\sigma_{\text{ш}}^2$

Аппроксимируем зависимости значения $P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}$ от $\sigma_{\text{ш}}^2$ уравнением вида полиномиальной модели 5-й степени:

$$\gamma(\sigma_{\text{ш}}^2) = \beta_5 \cdot (\sigma_{\text{ш}}^2)^5 + \beta_4 \cdot (\sigma_{\text{ш}}^2)^4 + \beta_3 \cdot (\sigma_{\text{ш}}^2)^3 + \beta_2 \cdot (\sigma_{\text{ш}}^2)^2 + \beta_1 \cdot (\sigma_{\text{ш}}^2) + \beta_0 \approx P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}(\sigma_{\text{ш}}^2). \quad (5)$$

В данном уравнении неизвестные коэффициенты $\beta_0, \dots, \beta_5$ вычисляются путем минимизации суммы квадратов отклонений экспериментальных данных от значений полинома (метод наименьших квадратов). Для координаты $\sigma_{\text{ш}}^2$ каждой i -й точки кривой на рис. 3 введем обозначение D_i , где $i = 1, 2, \dots, \Lambda$; Λ – количество точек кривой на графике (например, для кривой на рис. 3 $\Lambda = 30$). Также введем обозначение S_i для координаты $P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}$ каждой i -й точки кривой на рис. 3 (каждому значению D_i соответствует значение S_i). В этом случае значение полинома γ в точке D_i будет равно γ_i . Таким образом, для i -й точки кривой выражение (5) можно представить в виде

$$\gamma_i = \beta_5 \cdot (D_i)^5 + \beta_4 \cdot (D_i)^4 + \beta_3 \cdot (D_i)^3 + \beta_2 \cdot (D_i)^2 + \beta_1 \cdot D_i + \beta_0 \quad (6)$$

Чтобы охарактеризовать погрешность аппроксимации кривой были найдены значения среднего квадратического отклонения (СКО) аппроксимации следующим образом

$$\text{СКО} = \sqrt{(\sigma^2)_{\text{апп}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\Lambda} (S_i - \gamma_i)^2}{\Lambda}}, \quad (7)$$

На рис. 4 показаны примеры аппроксимации зависимостей $P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}$ от $\sigma_{\text{ш}}^2$, полученных в ходе экспериментов.

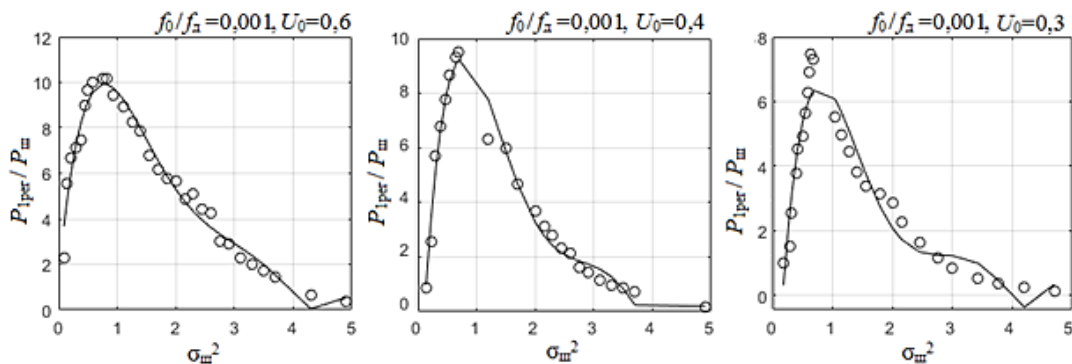


Рис. 4. Аппроксимация зависимостей соотношения $P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}$ от $\sigma_{\text{ш}}^2$ (сплошная линия – кривая аппроксимации, о – значения, полученные в ходе эксперимента)

Коэффициенты $\beta_0, \dots, \beta_5$, а также значения СКО и $(\sigma^2)_{\text{апп}}$ для кривых, показанных на рис. 4, приведены в табл. I.

ТАБЛИЦА I. ХАРАКТЕРИСТИКИ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

		$U_0=0,6$	$U_0=0,4$	$U_0=0,3$
Коэффициенты полинома для аппроксимации зависимости $P_{\text{пер}}/P_{\text{ш}}$ от $\sigma_{\text{ш}}^2$	β_5	0,167	0,319	0,251
	β_4	-2,340	-4,334	-3,412
	β_3	12,256	21,801	17,251
	β_2	-29,116	-49,203	-39,191
	β_1	27,181	44,588	36,205
	β_0	1,444	-4,361	-4,977
$(\sigma^2)_{\text{апп}}$		0,139	0,244	0,192
СКО $\sigma_{\text{апп}}$		0,373	0,494	0,439

Для определения точки максимума приведенных зависимостей была найдена первая производная выражения (5). Результат нахождения производной имеет следующий вид:

$$\gamma'_i = 5 \cdot \beta_5 (D_i)^4 + 4 \cdot \beta_4 (D_i)^3 + 3 \cdot \beta_3 (D_i)^2 + 2 \cdot \beta_2 (D_i) + \beta_1 \quad (8)$$

Функция (8) для дискретных значений D_i будет определяться выражением

$$\gamma'_i = 5 \cdot \beta_5 (D_i)^4 + 4 \cdot \beta_4 (D_i)^3 + 3 \cdot \beta_3 (D_i)^2 + 2 \cdot \beta_2 (D_i) + \beta_1.$$

Графики функции (8) для кривых при $U_0=0,6$, $U_0=0,4$, $U_0=0,3$ показаны на рис. 5.

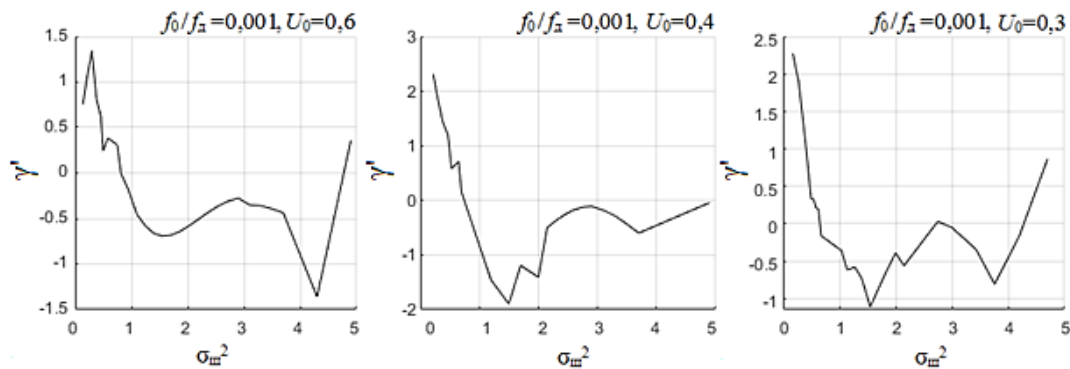


Рис. 5. Графики производных функции (6)

В качестве критерия наличия эффекта СР можно использовать положение экстремума полинома на оси абсцисс. Выполняя необходимое условие экстремума, первая производная (8) должна обращаться в нуль, на графиках рис. 5. Численные значения положений максимумов аппроксимирующих функций на рис. 5 приводятся в табл. II. Также в таблице подсчитаны граничные значения интенсивности шума, при которых в системе присутствует явление СР.

ТАБЛИЦА II. Численные значения положений максимумов

U_0	0,6	0,4	0,3
Положение максимума на оси абсцисс	0,75	0,70	0,65
Граничные значения $\sigma_{ш}^2$	0,09–3,3	0,22–2,45	0,28–2,00

Критерием наличия эффекта СР будем считать величину соотношения $P_{рег}/P_{ш} \geq 2$. По рис. 4 можно определить диапазон интенсивности шума на входе, при котором возникает эффект СР. Эффект СР возникнет в системе при амплитуде полезного сигнала $U_0=0,6$ и интенсивности шума в диапазоне 0,09–3,3. При амплитуде полезного сигнала $U_0=0,4$ эффект СР возникнет в диапазоне интенсивности шума 0,22–2,45. При амплитуде полезного сигнала $U_0=0,3$ эффект СР возникнет в диапазоне интенсивности шума 0,28–2,00. Таким образом, снижение амплитуды входного полезного сигнала ведет к уменьшению диапазона интенсивности шума на входе.

Анализ табл. II показывает, что максимальное значение интенсивности шума, при котором возникает эффект СР, наблюдается при максимальной амплитуде полезного сигнала. При уменьшении амплитуды полезного сигнала максимум сдвигается в сторону меньших значений интенсивности шума.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что изменение отношения сигнал/шум на выходе нелинейной системы, включающей в себя цифровой фильтр на основе характеристической функции Ляпунова и пороговое устройство, при изменении интенсивности шума имеет специальную

(резонансную) форму. Графики зависимости $h_{вых}^2 = F((\sigma_{ш}^2)_{вх})$ описываются полиномиальными зависимостями с экстремумами, соответствующими следующим значениям дисперсии шума: $(\sigma_{ш}^2)_{вх} = 0,75$ при $U_0=0,6$; $(\sigma_{ш}^2)_{вх} = 0,70$ при $U_0=0,4$; $(\sigma_{ш}^2)_{вх} = 0,65$ при $U_0=0,3$.

Установлены граничные значения интенсивности шума, при которых происходит эффект СР в системе с различными параметрами входного полезного сигнала, $(\sigma_{ш}^2)_{вх} = 0,09–3,3$ при $U_0=0,6$; $(\sigma_{ш}^2)_{вх} = 0,22–2,45$ при $U_0=0,4$; $(\sigma_{ш}^2)_{вх} = 0,28–2,00$ при $U_0=0,3$.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю к.т.н., доценту кафедры РТУ и СД Д.А. Титову (Омский государственный технический университет, Омск, Россия) за помощь в написании этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // Успехи физических наук. 1999. Том 169, № 1. С. 7–38.
- [2] Вешкурцев Ю.М., Титов Д.А., Табакова А.С. Зависимость стохастического резонанса в нелинейной системе от характеристик каждого слагаемого аддитивной смеси // Журнал радиоэлектроники. 2023. № 10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.10.10>
- [3] Tabakova A.S. Spectral characteristics of nonlinear system output under stochastic resonance // 2023 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). 2023. DOI:10.1109/Dynamics 60586.2023.10349487
- [4] Вешкурцев Ю.М. Спектральные характеристики выходных сигналов цифрового фильтра в условиях возникновения стохастического резонанса / Ю.М. Вешкурцев, Д.А. Титов, А.С. Табакова // Теория и техника радиосвязи. 2023. № 2. С. 28–37.
- [5] Вешкурцев Ю.М., Вешкурцев Н.Д., Титов Д.А. Приборостроение на базе характеристической функции случайных процессов: Монография. Новосибирск, Изд. АНС «СибАК». 2018. 182 с.
- [6] Amplitude-Frequency Characteristic of the Device for Measuring Estimates of the Characteristic Function of Signal / D.A. Titov, A.S. Tabakova, I.V. Yunkin // 2021 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). 2021. DOI: 10.1109/Dynamics52735.2021.9653698.
- [7] Лукач Е. Характеристические функции / пер. с англ. В.М. Золотарева. Москва: Наука, 1979. 423 с.