

Нейросетевые модели алгоритмов быстрого преобразования Фурье

А. Ю. Дорогов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

vaksa2006@yandex.ru

Аннотация. В работе предложена нейросетевая схема построения алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), основанная на стратификации модели БПФ на топологическую и параметрическую составляющие. Топология определяет граф алгоритма, её выбор инвариантен к виду преобразования и выполняется независимо, следуя правилами проектирования структуры самоподобных нейронных сетей. Выбор параметров базовых операций подчинён топологической модели, и не требует использования итерационных процедур связанных с последовательным разложением дискретных функций Фурье. В результате сложность проектирования алгоритма БПФ не зависит от значения и композиционного представления размерности преобразования. Более того, можно подобрать топологию алгоритма, которая обеспечивает естественную упорядоченность выходных спектральных коэффициентов алгоритма БПФ по частотам следования. В работе приведены примеры построения топологии и БПФ для композиционной размерности.

Ключевые слова: быстрое преобразование Фурье; топологическая модель; самоподобная нейронная сеть; параметрическая настройка

I. ВВЕДЕНИЕ

Спектральный анализ сигналов, основанный на методах дискретного преобразования Фурье (ДПФ), широко применяется для обработки сигналов в различных областях знаний и технических приложениях. Мощный импульс развития это направление получило после публикации в 1965 году статьи Кули и Тьюки по быстрому преобразованию Фурье (БПФ) [1]. Отчасти этому способствовало бурное развитие вычислительной техники в то время. Следует отметить, что быстрое преобразование Фурье имеет давнюю историю [2]. Первые работы по БПФ, относящиеся к 1805 году, связаны с именем Гаусса [3], но были опубликованы только в 1866 году уже после его смерти. Далее в 19-ом и 20-м веке метод БПФ неоднократно переоткрывался с различными модификациями. В частности, статья Кули и Тьюки непосредственно предшествовала замечательная работа Гуда по алгоритму БПФ [4], (1958г.) которая в то время прошла не замеченной.

Алгоритм БПФ основан на рекуррентной мультипликативной декомпозиции комплексной экспоненты, позволяющей свести вычисление преобразования ДПФ большой композиционной размерности к малым размерностям ДПФ, вплоть до размерности равной двум и за счёт этого кардинально уменьшить число вычислительных операций. Алгоритм Кули–Тьюки был разработан для преобразований размерности $N = 2^n$, которые рекуррентно за n шагов

трансформировались в последовательно-параллельную совокупность ДПФ преобразований размерности 2. Этот процесс эквивалентен разложению (факторизации) матрицы ДПФ размерности N в произведение из n слабо заполненных блочных матриц, где блоками являются ДПФ размерности 2, называемых базовыми операциями. Графический образ такой базовой операции напоминает «бабочку», этот термин прижился для алгоритмов данного класса. Схема построения алгоритма БПФ для размерности $N = 2^n$ была проста, наглядна и получила большое распространение. Однако, такая размерность часто избыточна в практических приложениях.

Алгоритм БПФ можно построить и когда размерность преобразования представляет собой некоторую мультипликативную композицию произвольных целых чисел $N = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$, но использование схемы Кули–Тьюки в этом случае становится очень громоздким. Тем не менее, алгоритмические трудности были преодолены, примером является широко-распространённый программный пакет FFTW [5].

Второй особенностью БПФ алгоритмов Кули–Тьюки является необходимость двоично-инверсного переупорядочивания спектральных коэффициентов, для того чтобы привести их последовательность к естественному порядку по возрастанию частоты. Для БПФ размерности $N = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ принцип переупорядочения существенно усложняется.

Все известные к настоящему времени схемы построения алгоритмов БПФ имеют отправной точкой базовые функции ДПФ. В результате рекуррентного процесса факторизации системы базовых функций, определяется топологический граф алгоритма БПФ, и одновременно находятся параметры базовых операций. В настоящей работе предлагается разделить эти два процесса. Стратификация процедуры даёт преимущества независимого проектирования и выбора топологии и параметрической настройки базовых операций для выбранной топологии. Этот принцип существенно упрощает способ построения БПФ и открывает возможности его использования для других видов спектральных преобразований. Процедура становится подобной настройке нейронной сети с заданной структурой к выбранной системе базовых функций. Первым шагом в этой процедуре является выбор топологической модели преобразования. Модель должна соответствовать внутренней структуре быстрого алгоритма. Характерным свойством рекуррентных

процессов является самоподобие. Методы построения самоподобных многослойных нейросетевых структур были рассмотрены автором в работах [6, 7, 8]. С позиций нейросетевой технологии базовые операции быстрого алгоритма уместно назвать нейронными ядрами.

II. НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

На рис. 1 показан пример графа топологической модели самоподобной нейронной сети размерностью 24 при композиции $p_0 = 2, p_1 = 3, p_3 = 4$. Размерность преобразования равна $N = p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 = 24$.

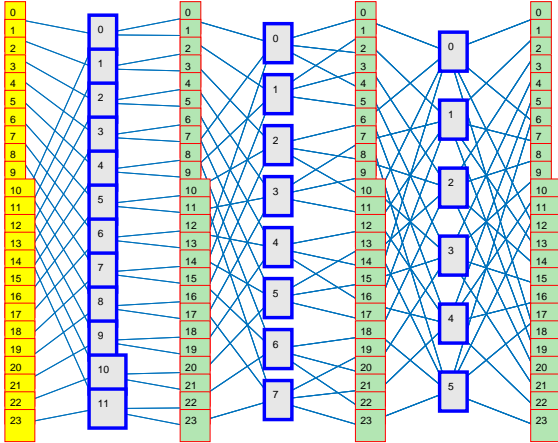


Рис. 1. Граф топологической модели для БПФ с естественным порядком следования спектральных коэффициентов, вариант 1

Выделенные прямоугольники представляют собой базовые операции (нейронные ядра). С точки зрения нейротехнологии, граф представляет собой трёхслойную нейронную сеть с прореженным множеством межслойных связей.

Выбор модели можно подчинить определённым требованиям, например, обеспечить естественный порядок спектральных коэффициентов по частотам следования. На рис. 1 показан граф топологической модели, обладающий подобным свойством. Топологическая модель имеет аналитическое представление, которое можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} U^m &= \langle u_m u_{m+1} \cdots u_{n-2} u_{n-1} v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_1 v_0 \rangle, \\ V^m &= \langle u_{m+1} u_{m+2} \cdots u_{n-1} v_m v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_1 v_0 \rangle, \\ z^m &= \langle u_{m+1} \cdots u_{n-2} u_{n-1} v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_1 v_0 \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индекс $m = 0, 1, \dots, n-1$ – означает номер нейронного слоя (для быстрых преобразований, отсчёт индексов и дискретных переменных принято вести с нуля), $U^m = 0 \cdots (N-1)$ – номер рецептора для слоя m , $V^m = 0 \cdots (N-1)$ – номер аксона для слоя m , z^m – номер нейронного ядра для слоя m , $u_m = 0 \cdots (1-p_m)$ – локальный номер рецептора для ядер слоя m , $v_m = 0 \cdots (1-p_m)$ – локальный номер аксона для ядер слоя m . Числа p_i являются множителями в мультипликативной композиции $N = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$.

Угловые скобки в выражении (1) выделяют кортеж, представляющий число в многоосновной системе счисления. Старшим считается крайний разряд слева, младшим – крайний разряд справа. Аналитическое описание топологической модели достаточно для построения графа алгоритма быстрого преобразования [6]. Графу алгоритма соответствует факторизованное представление матричного преобразования ДПФ, которое имеет вид:

$$H = H_0 H_1 \cdots H_{n-1}, \quad (2)$$

где каждой слабозаполненной матрице H_i в выражении (2) соответствует один слой графа топологической модели. В работе [7] показано, что для самоподобных сетей элементы матрицы преобразования $H = \|h(U, V)\|$ могут быть выражены в виде произведений элементов матриц базовых операций:

$$h(U, V) = w_{z^{n-1}}^{n-1}(u_{n-1}, v_{n-1}) w_{z^{n-2}}^{n-2}(u_{n-2}, v_{n-2}) \cdots w_{z^0}^0(u_0, v_0). \quad (3)$$

Для преобразования Фурье этот результат был получен Гудом в работе [4].

III. НАСТРОЙКА БЫСТРОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА БАЗИС ФУРЬЕ

По определению, функции дискретного базиса Фурье задаются выражением:

$$F_N(U, V) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} UV\right), \quad (4)$$

где U – временной отсчёт; V – частота (или номер) базисной функции; $j = \sqrt{-1}$, $N = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$ – размерность преобразования (для быстрых преобразований размерность всегда является составным числом). Предполагается, что преобразование ДПФ выполняется как умножение вектора-строки слева на матрицу F_N . Это же правило в дальнейшем будет применяться и к алгоритмам БПФ, по той причине, что оно соответствует направленности графа слева направо по выполняемым операциям.

Далее в статье будут рассмотрены несколько вариантов топологических моделей пригодных для построения алгоритмов БПФ с естественным упорядочением спектральных коэффициентов по частотам следования.

Вариант 1. Для построения алгоритма воспользуемся топологической моделью (1). Полагая $m = 0$ для входного слоя, будем иметь:

$$U = U^0 = \langle u_0 u_1 \cdots u_{n-2} u_{n-1} \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} u_m p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{n-1}.$$

Подставив последнее выражение в (4), и учитывая, что $N = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$ получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j \frac{2\pi V}{p_0 p_1 \cdots p_m} u_m\right). \quad (5)$$

Для выходного слоя $m = n-1$ из выражения (1) следует:

$$V = V^{n-1} = \langle v_{n-1} v_{n-2} v_{n-3} \cdots v_1 v_0 \rangle.$$

Для любого промежуточного разряда с номером m , последнее выражение можно записать в виде:

$$V = \langle v_{n-1}v_{n-2}v_{n-3} \dots v_1v_0 \rangle = \langle v_{n-1}v_{n-2} \dots v_{m+1} \rangle p_m p_{m-1} \dots p_0 + \dots + v_m p_{m-1} p_{m-2} \dots p_0 + \langle v_{m-1}v_{m-2} \dots v_0 \rangle.$$

Подставляя это выражение в (5) и учитывая периодичность комплексной экспоненты по периоду 2π , после преобразований, получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j2\pi \left[\frac{u_m v_m}{p_m} + u_m \frac{\langle v_{m-1}v_{m-2} \dots v_0 \rangle}{p_0 p_1 \dots p_m} \right] \right).$$

Каждый сомножитель в этом произведении соответствует элементу базовой операции в мультипликативном представлении (3). Таким образом, получено, что базовые операции алгоритма БПФ определяются выражением:

$$w_{z^m}^m(u_m, v_m) = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j \frac{2\pi}{p_m} u_m v_m \right) \exp \left(-j2\pi u_m \frac{\langle v_{m-1}v_{m-2} \dots v_0 \rangle}{p_0 p_1 \dots p_m} \right).$$

Кроме разрядных переменных $v_{m-1}, v_{m-2}, \dots, v_0$ выражение для номера ядра z^m содержит переменные $u_{m+1}, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}$, это означает, что базовые операции в пределах слоя будут повторяться.

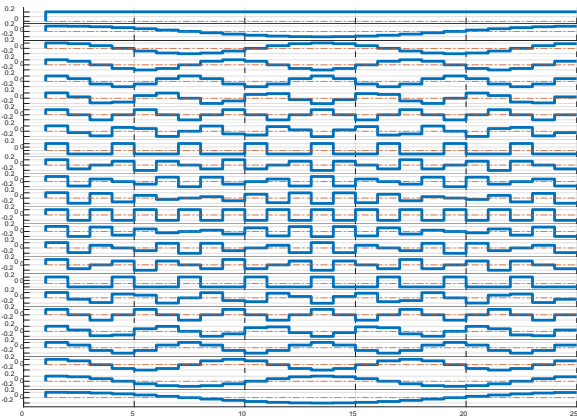


Рис. 2. Вещественная составляющая базиса Фурье

Следуя выражению (3), по элементам базовых операций, можно восстановить матрицу H дискретного преобразования Фурье. На рис. 2 и рис. 3 показаны функции, отвечающие столбцам восстановленной матрицы ДПФ для быстрого алгоритма представленного на рис. 1.

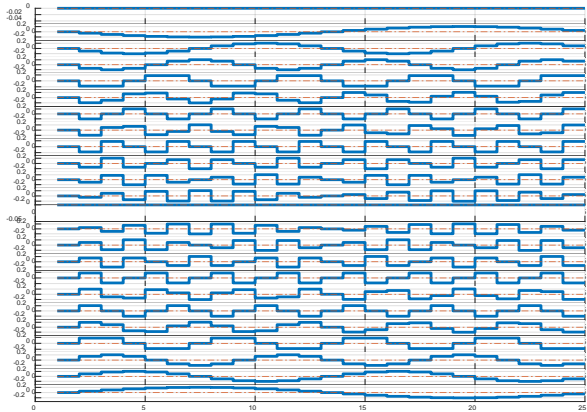


Рис. 3. Мнимая составляющая базиса Фурье

Нетрудно видеть, что функции построенного преобразования упорядочены по возрастанию частот.

Вариант 2. Если иначе представить переменные U и V модели, то можно, получить другое выражение для вычисления элементов нейронных ядер. Для координат выходного слоя можно записать:

$$V = V^{n-1} = \langle v_{n-1}v_{n-2}v_{n-3} \dots v_1v_0 \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} v_m p_{m-1} p_{m-2} \dots p_0.$$

Подставляя это представление в (4) получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j \frac{2\pi U}{p_m p_{m+1} \dots p_{n-1}} v_m \right). \quad (6)$$

Для любого m справедливо выражение:

$$U = U^0 = \langle u_0 u_1 \dots u_{n-2} u_{n-1} \rangle = \langle u_0 u_1 \dots u_{m-1} \rangle p_m p_{m+1} \dots p_{n-1} + \dots + u_m p_{m+1} \dots p_{n-1} + \langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} \rangle.$$

Подставляя последнее в (6) и учитывая периодичность комплексной экспоненты по периоду 2π после преобразований получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j2\pi \left[\frac{u_m v_m}{p_m} + v_m \frac{\langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} \rangle}{p_m p_{m+1} \dots p_{n-1}} \right] \right).$$

Каждый сомножитель в этом произведении соответствует элементу базовой операции в мультипликативном представлении (3). Таким образом, базовые операции алгоритма БПФ определяются выражением:

$$w_{z^m}^m(u_m, v_m) = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp \left(-j \frac{2\pi}{p_m} u_m v_m \right) \exp \left(-j2\pi v_m \frac{\langle u_{m+1} u_{m+2} \dots u_{n-1} \rangle}{p_m p_{m+1} \dots p_{n-1}} \right).$$

Базовые операции для двух представленных вариантов не совпадают между собой, но соответствуют одной и той же топологической модели. В обоих случаях реализуется БПФ с естественным упорядочением по частотам следования.

IV. ИНВЕРСНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Рассмотренные быстрые алгоритмы над входным вектором u выполняют преобразования эквивалентные умножению вектора-строки u слева на матрицу преобразования Фурье $F = \|F(U, V)\| =$ т. е. результат выполнения быстрого преобразования равен:

$$s = uF.$$

Но матрица Фурье симметрична, поэтому аналогичный результат можно получить, умножая матрицу F справа на вектор столбец:

$$s^T = Fy^T.$$

Вариант 3. Топологические модели для БПФ правого умножения могут быть получены из базовой модели (1) заменой номеров строк на номера столбцов, что ведёт к взаимной замене переменных u, v во всех кортежах модели. Выполнив такую замену, получим следующую топологическую модель:

$$V^m = \langle v_m v_{m+1} \cdots v_{n-2} v_{n-1} u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_1 u_0 \rangle,$$

$$U^m = \langle v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_{n-1} u_m u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_1 u_0 \rangle,$$

$$z^m = \langle v_{m+1} \cdots v_{n-2} v_{n-1} u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_1 u_0 \rangle.$$

Назовём её инверсной моделью. Граф топологической модели показан на рис. 4.

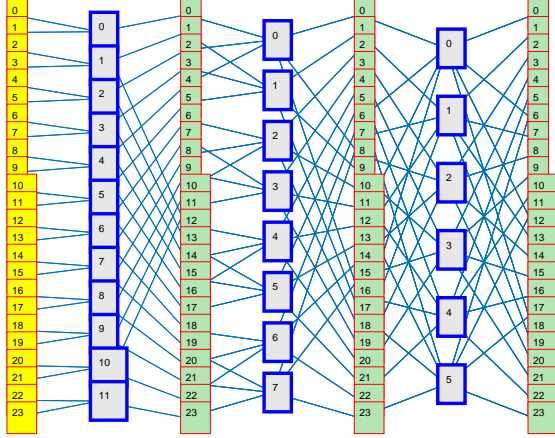


Рис. 4. Граф инверсной топологической модели

Определим параметры ядер для этой модели. Для нулевого слоя этой модели имеем

$$V = V^0 = \langle v_0 v_1 \cdots v_{n-2} v_{n-1} \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} v_m p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{n-1}.$$

Подставив в (4) получим

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j \frac{2\pi U}{p_0 p_1 \cdots p_m} v_m\right). \quad (7)$$

Для последнего слоя модели имеем:

$$U = U^{n-1} = \langle u_{n-1} u_{n-2} u_{n-3} \cdots u_1 u_0 \rangle.$$

Для любого m последнее выражение можно записать в виде:

$$U = \langle u_{n-1} u_{n-2} u_{n-3} \cdots u_1 u_0 \rangle = \langle u_{n-1} u_{n-2} \cdots u_{m+1} \rangle p_m p_{m-1} \cdots p_0 + \cdots + u_m p_{m-1} p_{m-2} \cdots p_0 + \langle u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_0 \rangle.$$

Подставив в (7) получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j 2\pi \left[\frac{u_m v_m}{p_m} + v_m \frac{\langle u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_0 \rangle}{p_0 p_1 \cdots p_m} \right]\right).$$

Каждый сомножитель в этом произведении соответствует элементу базовой операции в мультипликативном представлении (3). Таким образом, базовые операции алгоритма БПФ определяются выражением:

$$w_{z^m}^m(u_m, v_m) = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j 2\pi \frac{u_m v_m}{p_m}\right) \exp\left(-j 2\pi v_m \frac{\langle u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_0 \rangle}{p_0 p_1 \cdots p_m}\right).$$

Вариант 4. Представим иначе переменные U и V инверсной модели, положив:

$$U^{n-1} = \langle u_{n-1} u_{n-2} u_{n-3} \cdots u_1 u_0 \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} u_m p_{m-1} p_{m-2} \cdots p_0.$$

Подставив это выражение в (7) получим:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j \frac{2\pi V}{p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_m} u_m\right). \quad (8)$$

Далее полагая

$$V = \langle v_0 v_1 \cdots v_{n-2} v_{n-1} \rangle = \langle v_0 v_1 \cdots v_{m-1} \rangle p_m p_{m+1} \cdots p_{n-1} + \cdots + v_m p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{n-1} + \langle v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_{n-1} \rangle,$$

и подставляя последнее в (8) будем иметь:

$$F(U, V) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j 2\pi \left[\frac{u_m v_m}{p_m} + u_m \frac{\langle v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_{n-1} \rangle}{p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_m} \right]\right).$$

Отсюда следует, что элементы ядер будут определяться выражением:

$$w_{z^m}^m(u_m, v_m) = \frac{1}{\sqrt{p_m}} \exp\left(-j 2\pi \frac{u_m v_m}{p_m}\right) \exp\left(-j 2\pi u_m \frac{\langle v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_{n-1} \rangle}{p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_m}\right).$$

Базовые операции для двух последних вариантов не совпадают между собой, но соответствуют одной и той же топологической модели. В обоих случаях в инверсной топологии реализуется БПФ с естественным упорядочением по частотам следования.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена нейросетевая схема построения алгоритма быстрого преобразования Фурье. Преимущество предложенной схемы заключается в том, что её сложность сохраняется неизменной независимо от значения и композиционного представления размерности ДПФ преобразования. Новое качество достигается за счёт стратификации модельных представлений на топологическую и параметрическую составляющие. Топологическая модель не зависит от вида преобразования и строится согласно принципам структурного построения самоподобных нейронных сетей [9]. Выбор топологической модели многовариантен, что позволяет учесть дополнительные требования к построению БПФ. В работе предложены топологические модели, которые обеспечивают естественный порядок следования спектральных коэффициентов на выходе алгоритма БПФ по возрастанию частоты. Рассмотренная схема может быть использована для построения быстрых алгоритмов преобразований Уолша-Адамара, Хаара и других подобных ортогональных преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cooley J.W. and Tukey J.W., "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," Math. Comput., vol. 19, no. 2, pp. 297-301, April 1965. Reprinted in Digital Signal Processing, I. R. Rabiner and C.M. Rader, Eds., pp.223-227, New York: IEEE Press, 1972.
- [2] Michael T. Heideman, Don H. Johnson, C. Sidney Burrus. Gauss and the History of the Fast Fourier Transform IEEE ASSP MAGAZINE october1984, pp. 14-21.
- [3] Gauss C.F., "Nachlass: Theoria interpolationis methodo nova tractata," pp. 265-303, in earl Friedrich Gauss, Werke, Band 3, Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866.
- [4] Good I. J., "The interaction algorithm and practical Fourier analysis," // J. R. Statist. Soc. B, vol. 20, no. 2, pp. 361-372, 1958. Addendum in J. R. Statist. Soc. B, vol. 22, no. 2, pp. 373-375, 1960.
- [5] Matteo Frigo and Steven G. Johnson The Design and Implementation of FFTW3 Published in Proc. IEEE, vol. 93, no. 2, pp. 216-231 (2005).

- [6] Дорогов А.Ю. Быстрые преобразования и самоподобные нейронные сети глубокого обучения. Часть 1. Стратифицированные модели самоподобных нейронных сетей и быстрых преобразований. Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2023. № 4(32). С. 5-20. DOI: 10.25729/ESI.2023.32.4.001.
- [7] Дорогов А.Ю. Быстрые преобразования и самоподобные нейронные сети глубокого обучения. Часть 2. Методы обучения быстрых нейронных сетей. Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2024. № 1(33). С.5-19. DOI:10.25729/ESI.2024.33.1.001.
- [8] Дорогов А.Ю. Быстрые преобразования и самоподобные нейронные сети глубокого обучения. Часть 3. Пирамидальные нейронные сети с глубокой степенью обучения // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2024. № 2(34). С. 19-32. DOI:10.25729/ESI.2024.34.2.002 <https://www.imt-journal.ru/archive/public/article?id=366>.
- [9] Дорогов А.Ю. Самоподобные нейронные сети быстрого обучения. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2024. 188 с.